Expertise humaine et logique floue

Nathalie Perrot

Dr INRA, UMR GMPA

Équipe MALICES

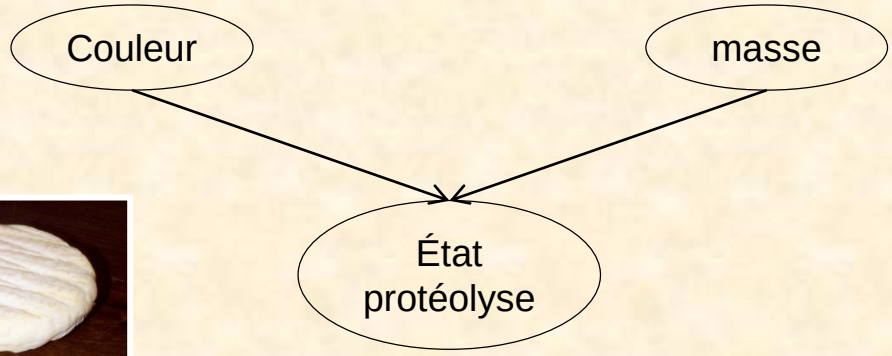
Hypothèses : l'expertise existe et l'expert est la référence

- **Difficultés potentielles**

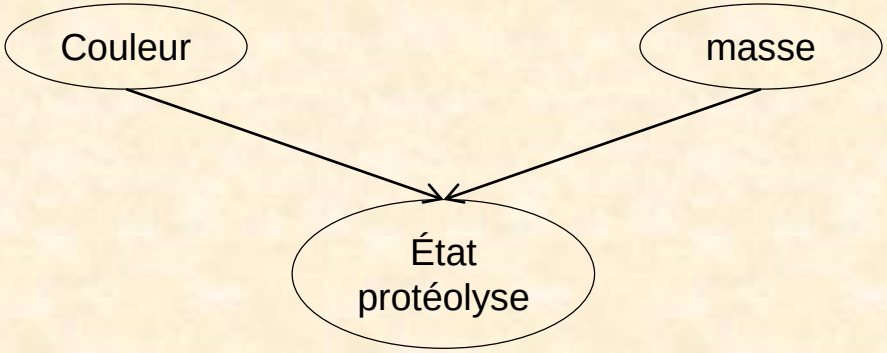
  - Accès à la ligne de production
  - Choix des opérateurs
  - Disponibilité des opérateurs
  - Validation en conditions réelles
  - Recueil d'expertise : phase-clé ⇨ convaincre !

- **Facteurs de réussite**
  - Importance de la relation interviewé/opérateur
  - Écoute, relation de confiance, enthousiasme
  - Expliquer, informer, montrer l'avancement
  - Personne externe à l'entreprise
  - Fiabilité des mesures
  - Importance de l'interface ⇨ déclic !

Supposons un système défini par son état de protéolyse en fonction de sa couleur et sa masse



Comment représenter ce système????

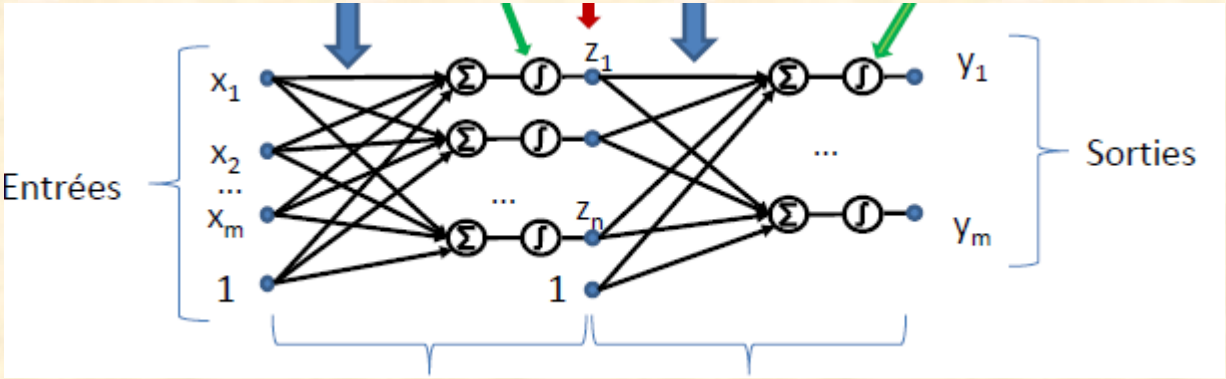


$$ETAT\ PROT = f(MASSE, COULEUR)$$

MAIS…Pas toujours possible

Base de données

RN

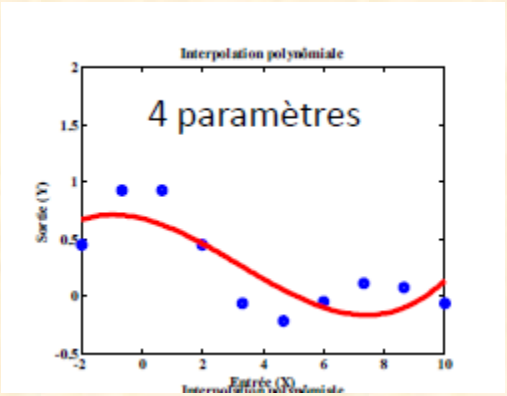


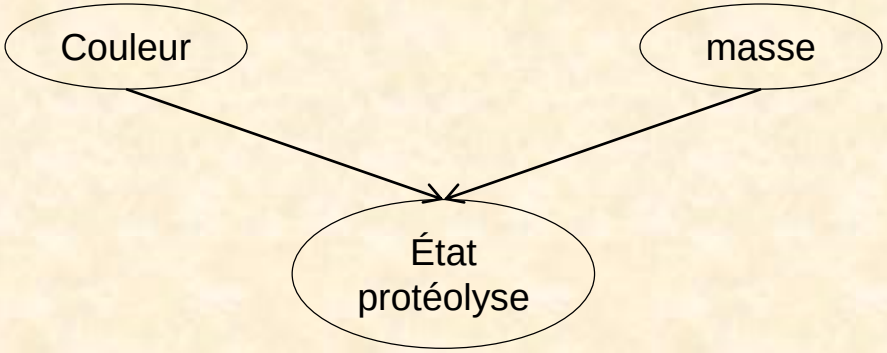
$$P(X_1, X_2, ..., X_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i | pa(X_i))$$

Node	Parents	Probabilities
A		$P(A=a_1) = 0.99$ $P(A=a_2) = 0.01$
B	A,E	$P(B=b_1 \mid A=a_1, E=e_1) = 0.5$ $P(B=b_2 \mid A=a_1, E=e_1) = 0.5$ $P(B=b_1 \mid A=a_1, E=e_2) = 0.1$ $P(B=b_2 \mid A=a_1, E=e_2) = 0.9$ $P(B=b_1 \mid A=a_2, E=e_1) = 0.4$ $P(B=b_2 \mid A=a_2, E=e_1) = 0.6$ $P(B=b_1 \mid A=a_2, E=e_2) = 0.2$ $P(B=b_2 \mid A=a_2, E=e_2) = 0.8$

Node	Parents	Probabilities
C	B	$P(C=c_1 \mid B=b_1) = 0.3$ $P(C=c_2 \mid B=b_1) = 0.7$ $P(C=c_1 \mid B=b_2) = 0.5$ $P(C=c_2 \mid B=b_2) = 0.5$
D	A	$P(D=d_1 \mid A=a_1) = 0.8$ $P(D=d_2 \mid A=a_1) = 0.2$ $P(D=d_1 \mid A=a_2) = 0.7$ $P(D=d_2 \mid A=a_2) = 0.3$
E		$P(E=e_1) = 0.75$ $P(E=e_2) = 0.25$

RB





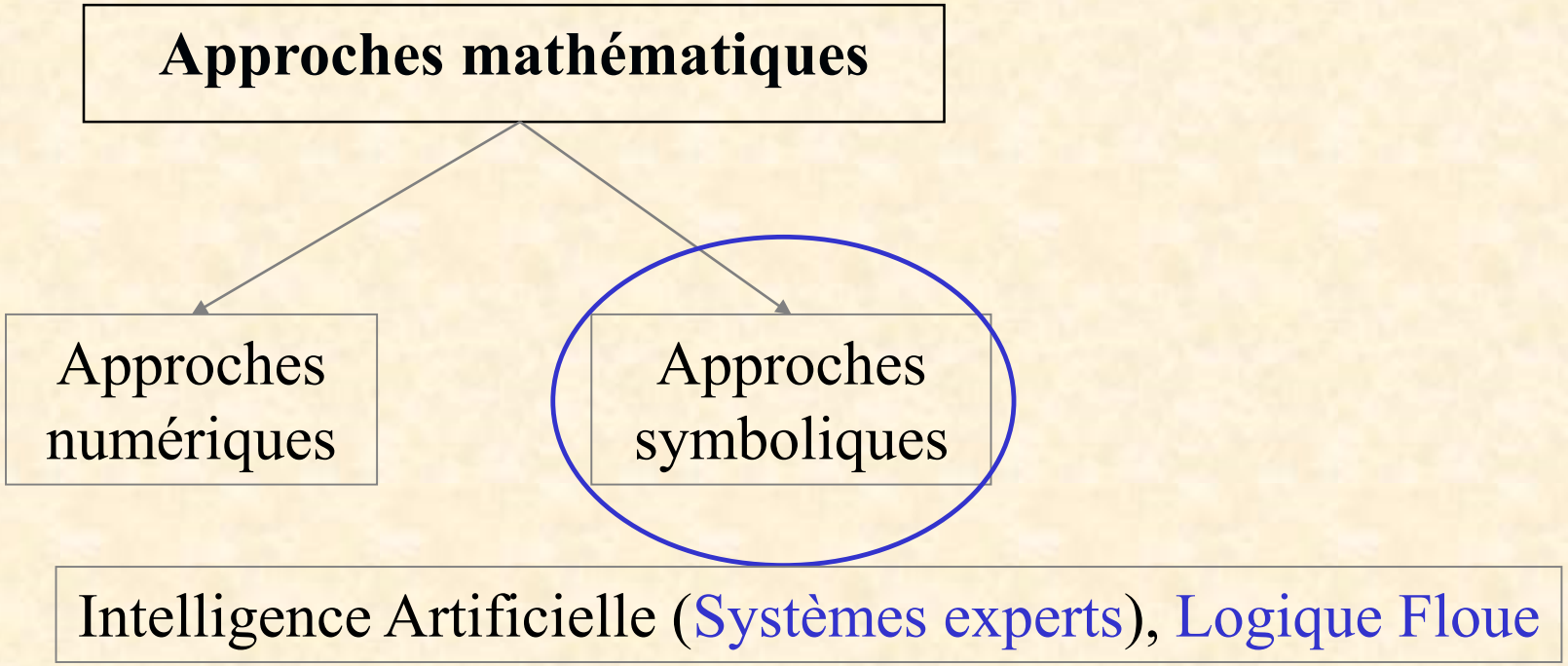
Base d'expérience

R1 : Si la couleur est *Ivoire* et la masse est *moyen*
ALORS le fromage est *peu protéolysé*.
R2 : Si la couleur est *jaune* et la masse est *moyen*
ALORS le fromage est *moyennement protéolysé*.
R3 : Si la couleur est *ivoire* et la masse est *faible*
ALORS le fromage est *peu protéolysé*.

Comment la traiter??

IDEE Construire l'algorithme

Mesure, mesure indirecte ou aide à la décision

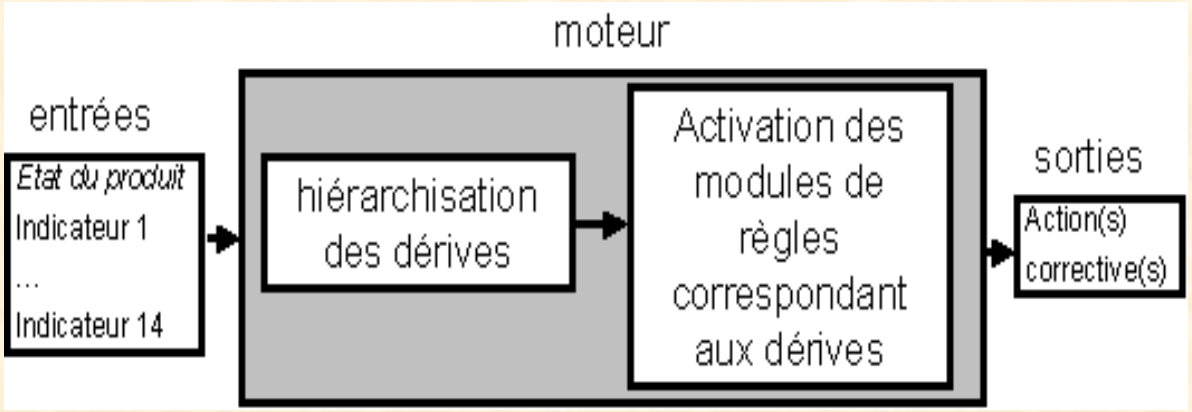


Les systèmes experts

« *Un système expert est un programme informatique simulant l'intelligence humaine dans un champ particulier de la connaissance ou relativement à une problématique déterminée.* »

3 composants essentiels :

- Une base de connaissance
- Un ensemble de règles de décision
- Un moteur d'inférence



La logique floue

⇨ Théorie des ensembles flous

⇨ Théorie des possibilités

Logique floue - Historique

Origine : formalisation de l ’incertain (Pascal et Bernouilli 17ème)

- Incertain objectif : jeux de hasard
- Incertain subjectif : fiabilité des évidences

1965 : Théorie de L. Zadeh

- Association à une connaissance d ’un ensemble flou

1975-98 : Application de ce concept au contrôle et démonstrations grand public

- Mamdani, Takagi et Sugeno

Logique floue - Quelques applications en alimentaire

AUTEURS	MESURE	MODELISATION	CONTROLE	
[Davidson 99]		✓	✓	cuisson four batch
[Eerikainen 88]			✓	extrusion
[Khodja 96]	✓			arômes café
[Linko 92]			✓	extrusion
[Ruger 95]			✓	séchage
[Simutis 93]		✓		biotechnologie
[Sun 93]	✓			arôme cacahuètes
[Yea 94]	✓			odeurs
[Zhang 92 93]		✓	✓	séchage

Logique floue - Objectifs

Prendre en compte à l ’aide d ’outils mathématiques la connaissance et la représentation mentale d ’un individu afin de modéliser un système, son contrôle ou des informations pertinentes le concernant

Deux axes :

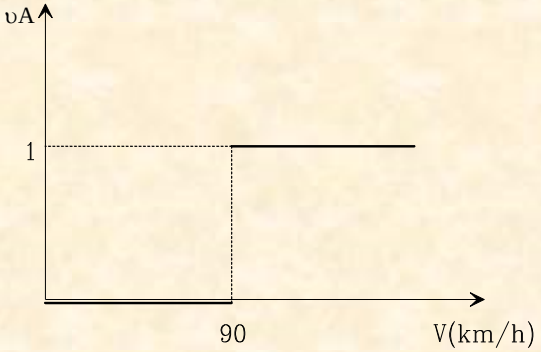
- Ensembles flous
- Raisonnement flou

2 Théorie des ensembles flous

Logique floue - Théorie (1ère approche)

Logique Booléenne
Inclusion ou exclusion totale

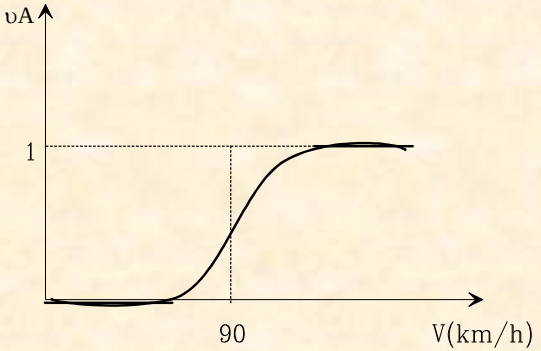
"A=set of speed upper than 90 km/h"



A={v/μA(v) =1} XA= characteristic function

Logique floue
Transitions graduelles

"A=set of the high speed"



A={v/μA(v) ≠0} μA= membership function

3 méthodes basiques pour définir un ensemble:

Soit un ensemble A et des éléments de cet ensemble a_1 à an

A={a1,……an};

A={x/P(x)} P(x) « x a les propriétés P »
Pour tout x ϵX, P=0 ou 1;

Fonction caractéristique $\chi_A(x)$= 1 si x ϵ A; 0 sinon; Mapping des éléments de X sur un ensemble {0,1}:
χ_A: X→ {0, 1}

Quelques notations et propriétés:

1 A inclus $\subset=$ B : dans ce cas A est un sous ensemble de B

2 $A \neq B$: A ne contient pas les mêmes éléments que B

1+2 : A $\subset$ B mais au moins 1 élément de B qui n'est pas dans A: A $\subset$ B, A est un sous ensemble strict

$B-A=x/\ x \epsilon B$ AND $x \notin A$

$BUA=x/\ x \epsilon B$ OR $x \epsilon A$

Représentez sur feuille

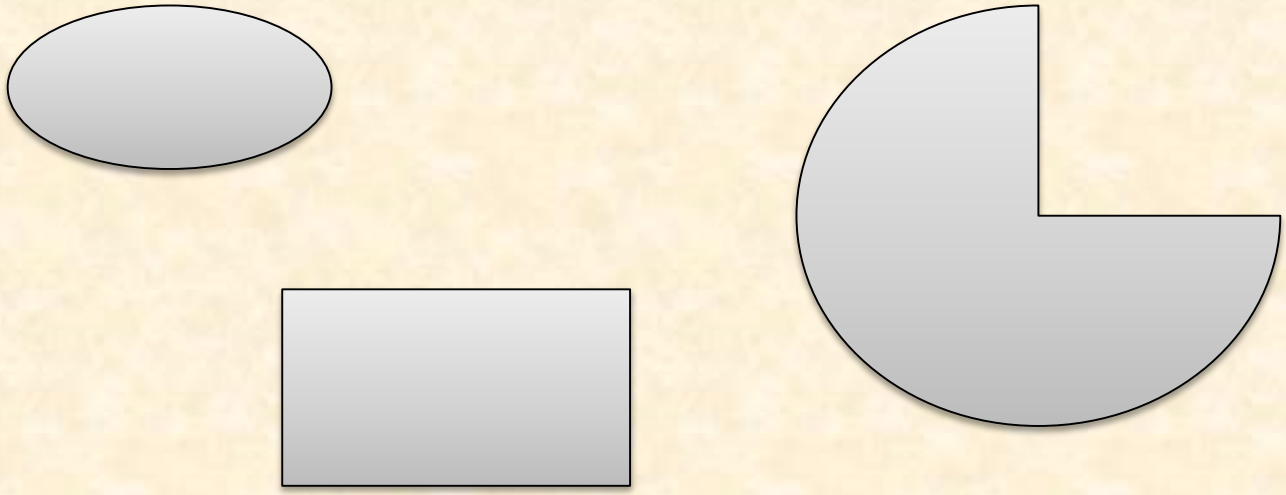
$A \cap B=\{x/x \epsilon A$ AND $x \epsilon B\}$

TABLE 1.1 FUNDAMENTAL PROPERTIES OF CRISP SET OPERATIONS

Involution	$\overline{\overline{A}} = A$
Commutativity	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap B = B \cap A$
Associativity	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributivity	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotence	$A \cup A = A$
	$A \cap A = A$
Absorption	$A \cup (A \cap B) = A$
	$A \cap (A \cup B) = A$
Absorption by X and $\varnothing$	$A \cup X = X$
	$A \cap \varnothing = \varnothing$
Identity	$A \cup \varnothing = A$
	$A \cap X = A$
Law of contradiction	$A \cap \overline{A} = \varnothing$
Law of excluded middle	$A \cup \overline{A} = X$
De Morgan's laws	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Quelques notations et propriétés:

Ensembles convexes?



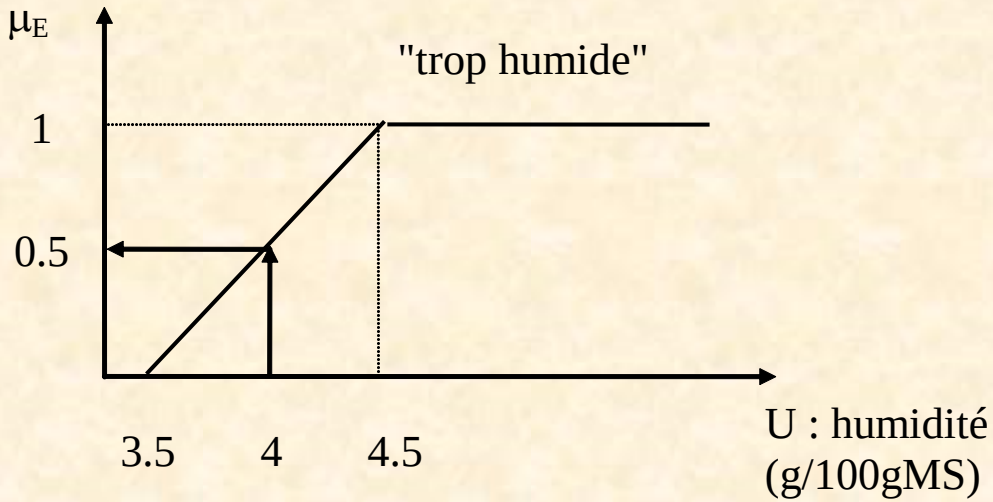
Définition convexité?

Logique floue - Théorie (ensembles flous)

U=variable; E=ensemble

$$E = \{(u, \mu_E(u)) \setminus u \in E\}$$

$$\mu_E : U \rightarrow [0,1]$$



Definitions

Support : Elements de U qui appartiennent au sous ensemble A de E avec un degré supérieur à 0

$$\text{supp}(A) = \{x \in U / f_A(x) \neq 0\}$$

Hauteur : la plus haute valeur prise par la fonction d'appartenance

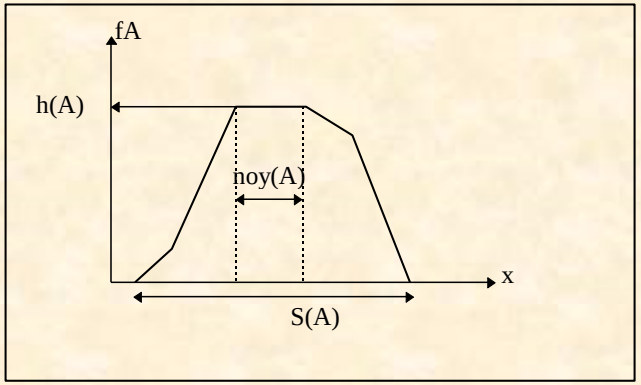
$$h(A) = \sup_{x \in U} f_A(x)$$

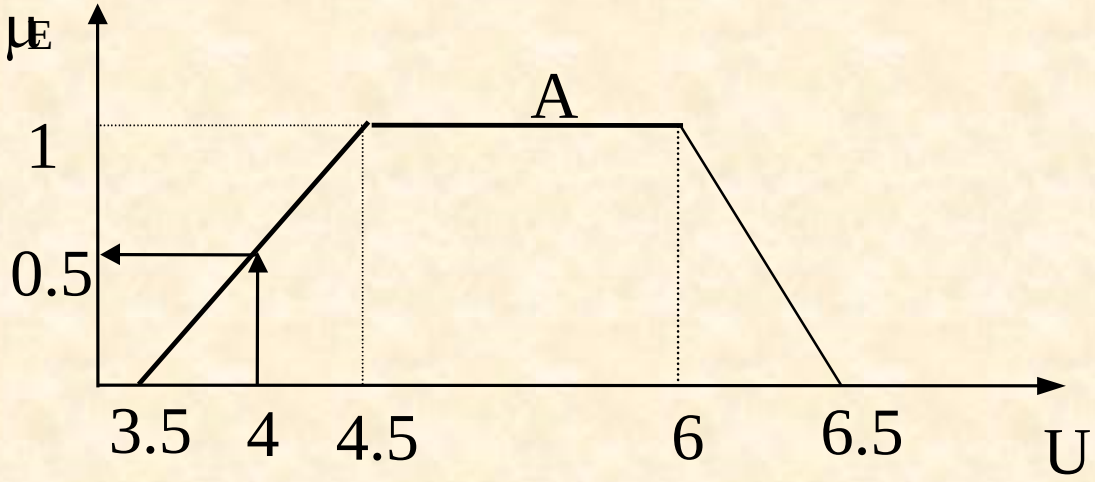
Noyau : l'ensemble des éléments qui appartiennent à A avec un degré 1

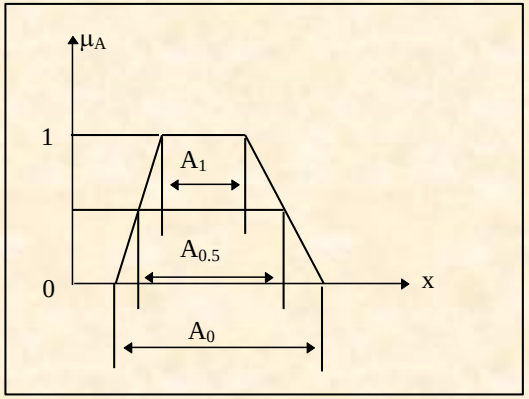
$$\text{noy}(A) = \{x \in U / f_A(x) = 1\}$$

Représentez sur feuille

Exemples







$$\text{supp}\,(A) =]3.5;6.5[$$

$$h(A) = 1$$

$$noy(A) = [4.5;6]$$

4 fonctions floues courantes:

r est le nombre réel pour lequel le degré d'appartenance est égal à 1

$$A1(x) = \begin{cases} p1(x-r)+1 \; when \; x\epsilon[r-\frac{1}{p1}, r] \\ p1(r-x)+1 \; when \; x\epsilon[r, r+\frac{1}{p1}] \\ 0 \; otherwise \end{cases}$$

Tracez sur Matlab binômes

$$A2(x) = \frac{1}{1+p2(x-r)^{\;2}}$$

$$A3(x) = e^{-|p3(x-r))}$$

$$A4(x) = \begin{cases} \frac{1+\cos(p4\pi(x-r))}{2} when \; x \in [r-\frac{1}{p4}, r+\frac{1}{p4}] \\ 0 \; otherwise \end{cases}$$

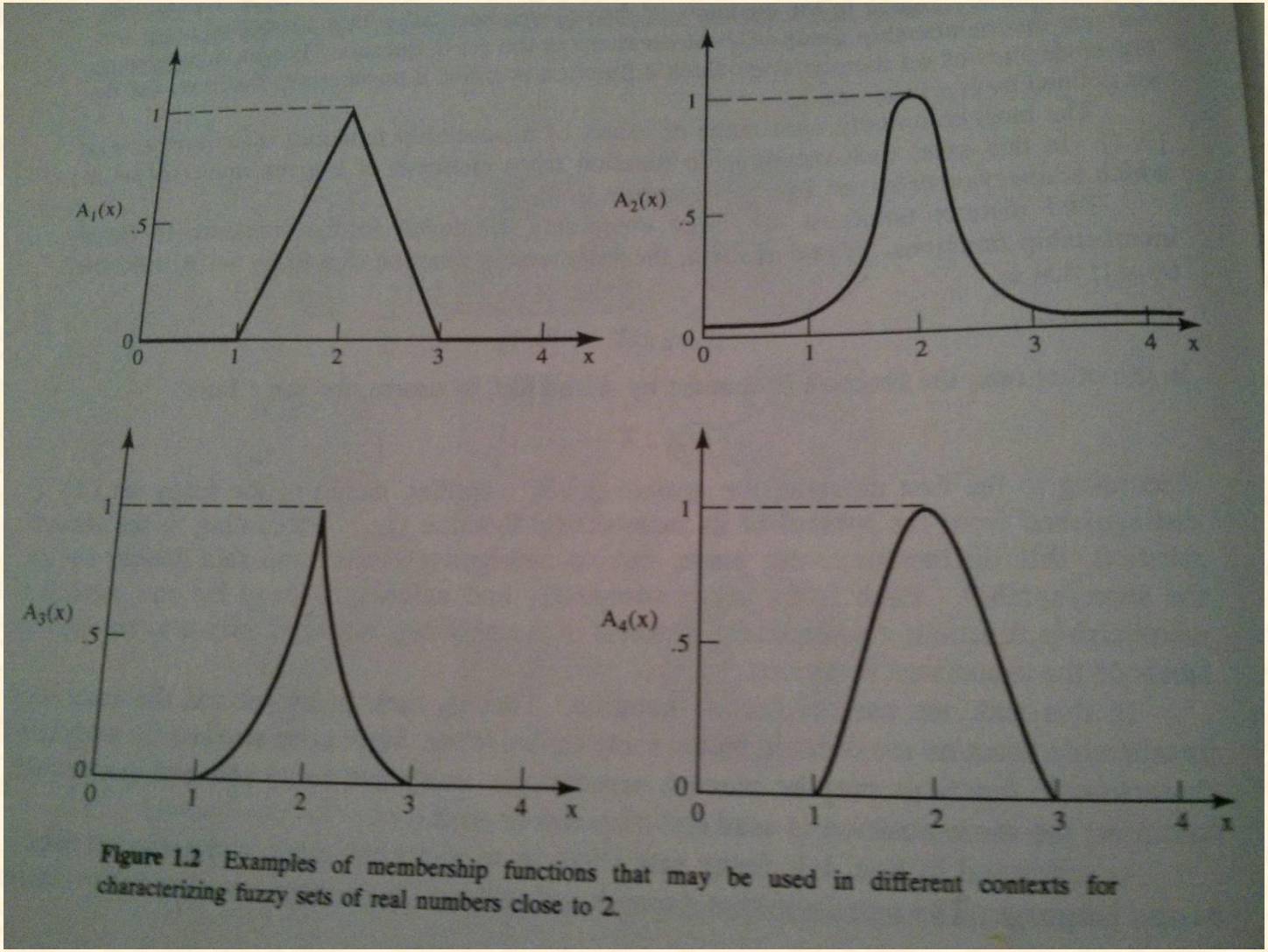
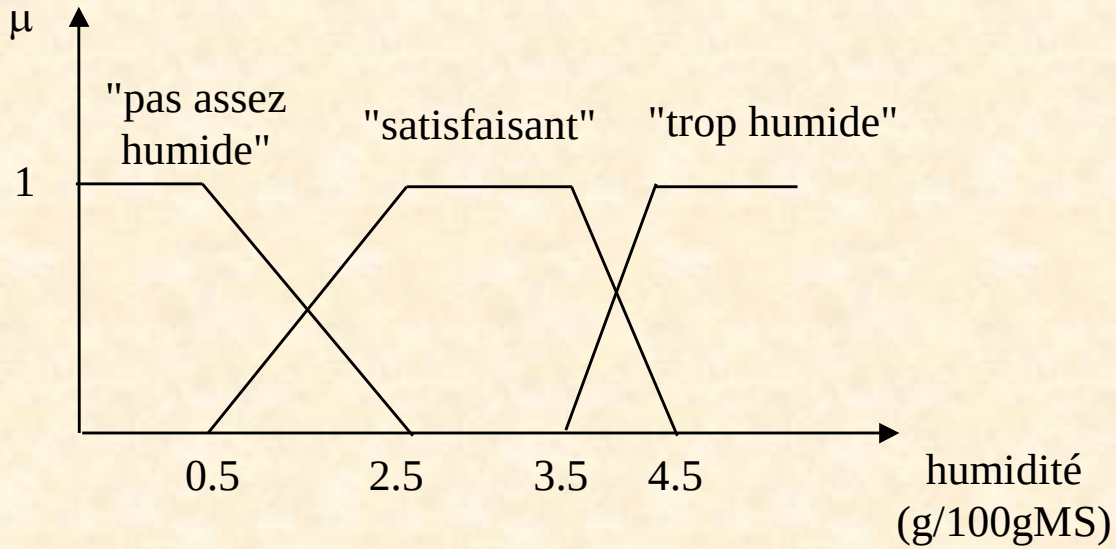


Figure 1.2 Examples of membership functions that may be used in different contexts for characterizing fuzzy sets of real numbers close to 2.

Logique floue - Théorie (ensembles flous)

⇨ Différentes distributions

⇨ Variable linguistique



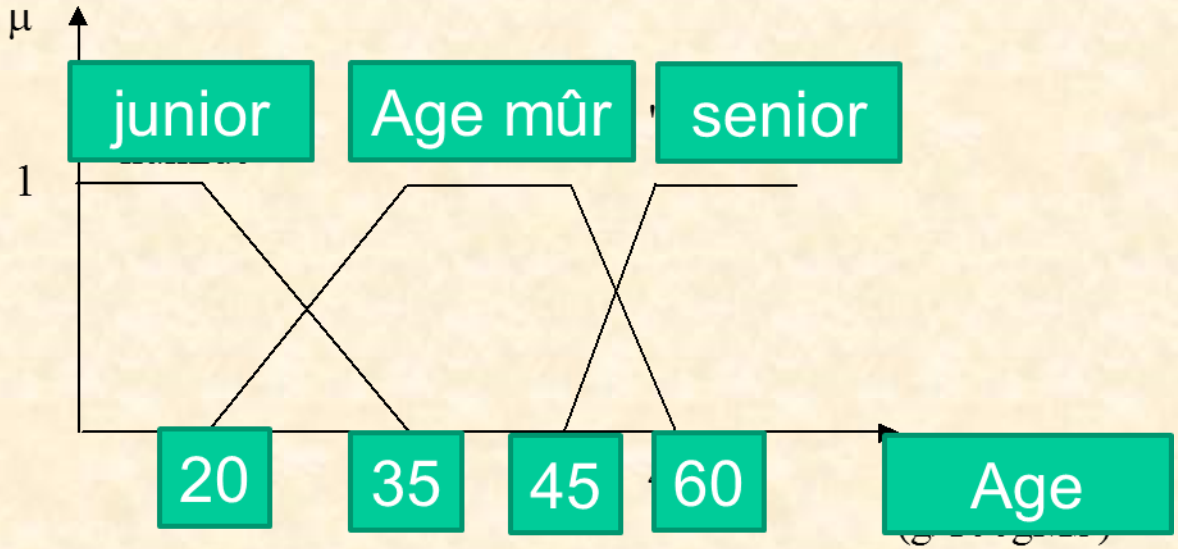
Exemple de fonctions floues:

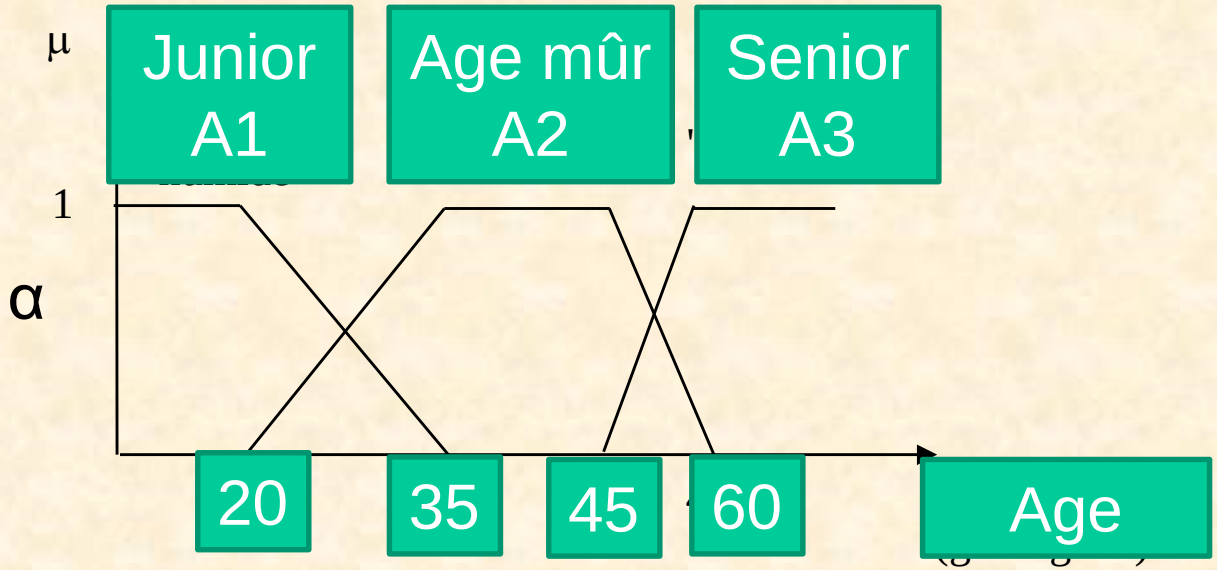
3 ensembles flous définissant le concept d'age définies sur

$$A1(x) = \begin{cases} 1 \; when \; x \leq 20 \\ \dfrac{(35 - x)}{15} \; when \; 20 < x < 35 \\ 0 \; otherwise \end{cases}$$

$$A2(x) = \begin{cases} 0 \; when \; either \; x \leq 20 \; or \; \geq 60 \\ \dfrac{x - 20}{15} when \; 20 < x < 35 \\ \dfrac{60 - x}{15} when \; 45 < x < 60 \\ 1 \; when \; 35 \leq x \leq 45 \end{cases}$$

$$A3(x) = \begin{cases} 0 \; when \; x \leq 45 \\ \dfrac{x - 45}{15} when \; 45 < x < 60 \\ 1 \; otherwise \end{cases}$$



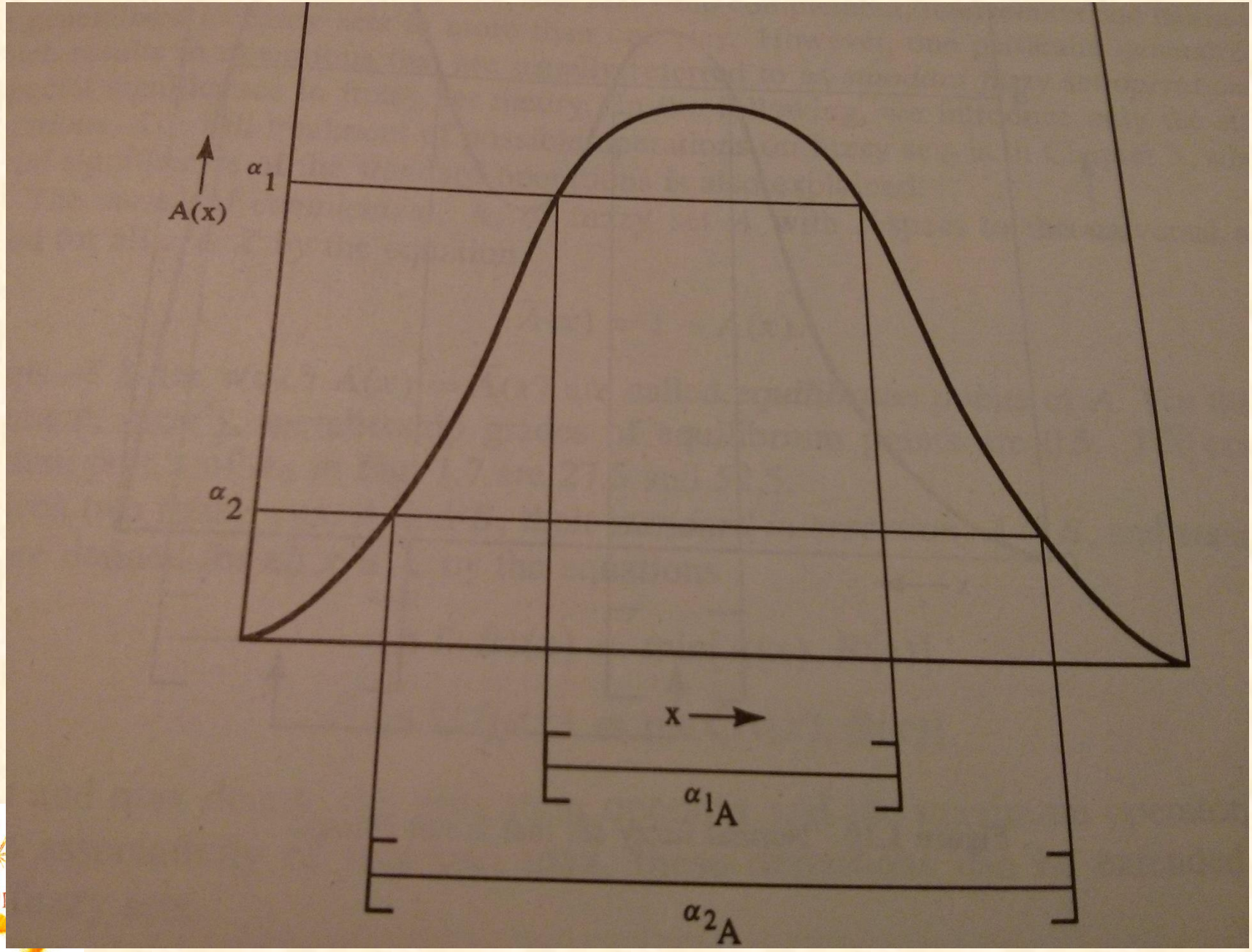


Le concept d' α coupe et strict α coupe est important pour tout ensemble flou défini sur X et tout nombre entre [0,1]:

$$\propto A = \{x/A(x) \geq \propto\}$$
$$\propto +A = \{x/A(x) > \propto\}$$

Calculez $\propto A1$, $\propto A2$, $\propto A3$ par exemple

bis


A(x)
α_1
α_2
x
$\alpha_1 A$
$\alpha_2 A$

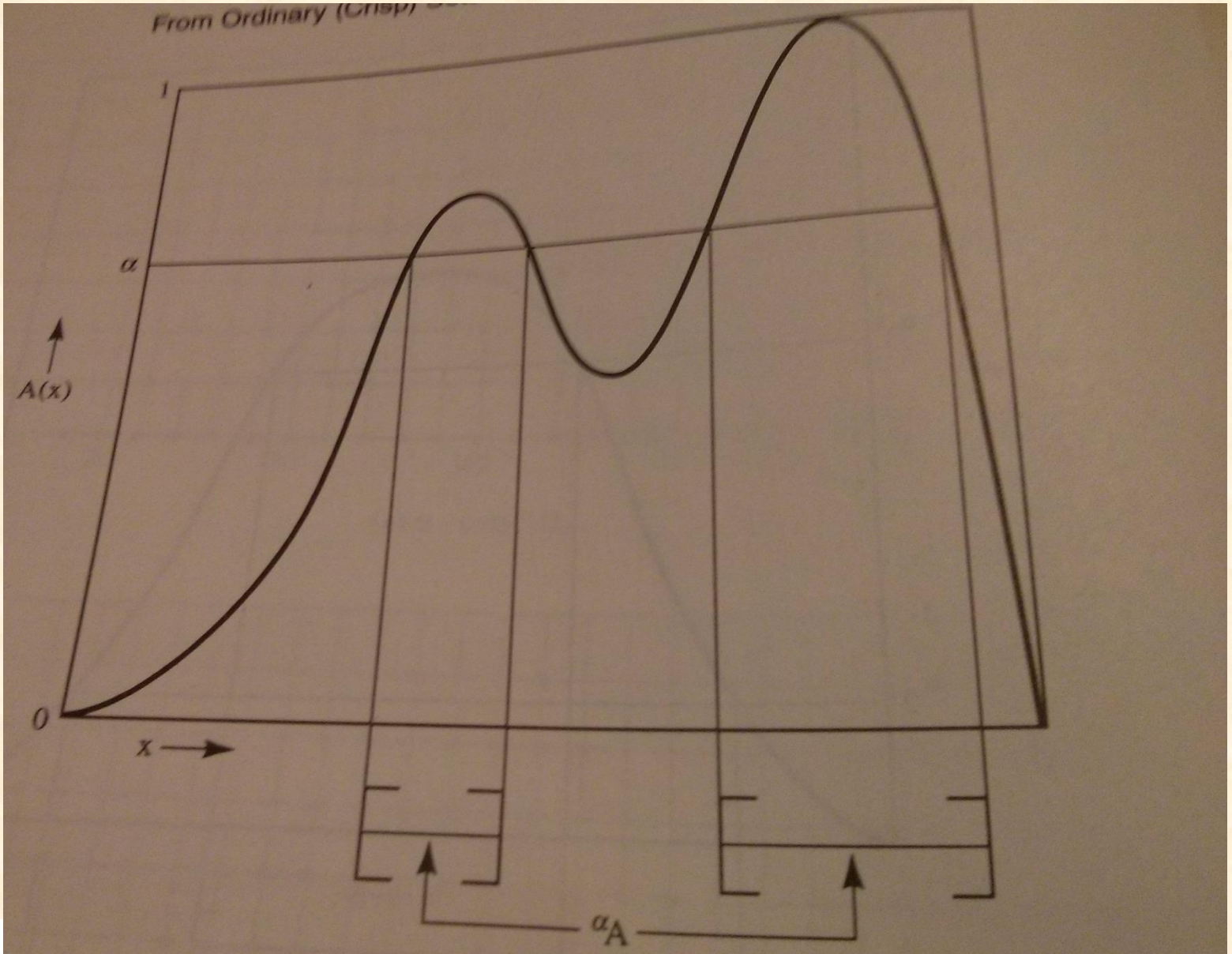
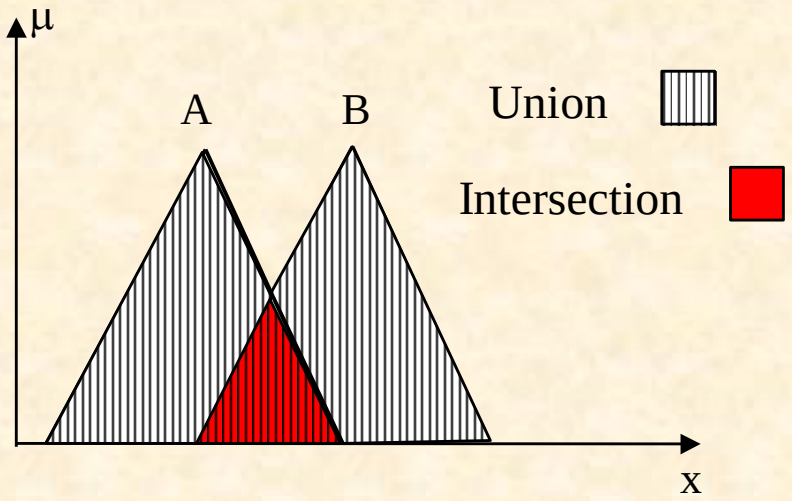


Figure 1.10 Normal fuzzy set that is not convex.

is

Logique floue - Théorie (ensembles flous)

⇨ Intersection entre ensembles flous



$i: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$

$(A \cap B)(x) = \min[A(x), B(x)]$ **Tnorm** « AND »

$(A \cup B)(x) = \max[A(x), B(x)]$ **Tconorm** « OR »

Autres T-norm

Zadeh t-norm	$T(x,y)=\min(x,y)$
Probabilist t-norm	$T(x,y)=xy$
Lukasiewiewicz t-norm	$T(x,y)=\max(x+y-1,0)$

Autres T-conorms

Zadeh T-conorm	Tc (x,y)=max(x,y)
Probabilist T-conorm	Tc(x,y)=x+y-xy
Lukasiewiewicz T-conorm	T(x,y)=min(x+y,1)

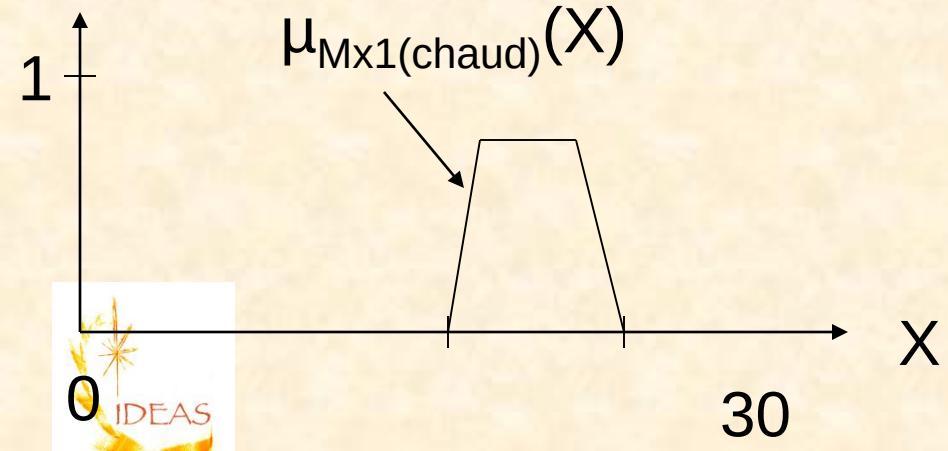
Tracez les différentes fonctions en générant un maillage de 0 à 1 (binômes)

Fuzzy meanings (FM) and descriptions (FD)

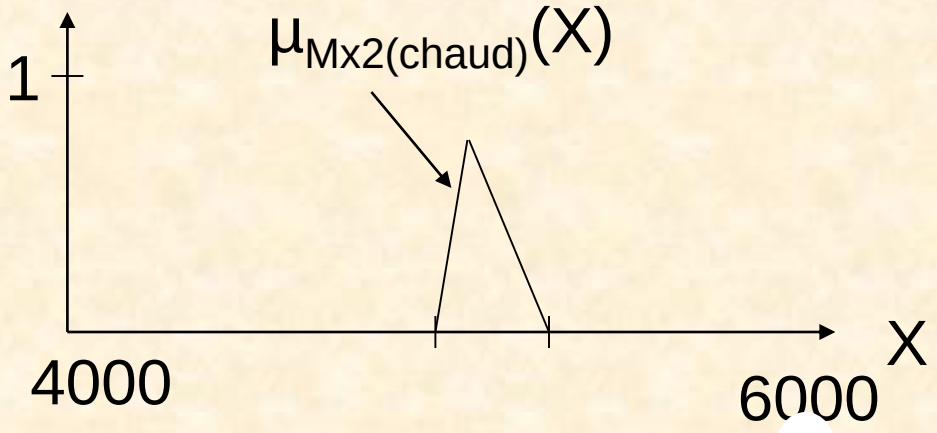
FM correspond à trouver le sous ensemble des nombres et incertitudes associées qui représentent le symbole (ex : chaud [20,27])

Fuzzy Meaning (FM) :

X1 = [0,30]
Temperature of a lake



X2 = [4000,6000]
Temperature of steel flow



Fuzzy meanings (FM) and descriptions (FD)

FD d'un nombre c'est trouver l'ensemble des sous ensembles linguistiques associés à ce nombre (ex : 22°C 0.2/W + 0.8/H)

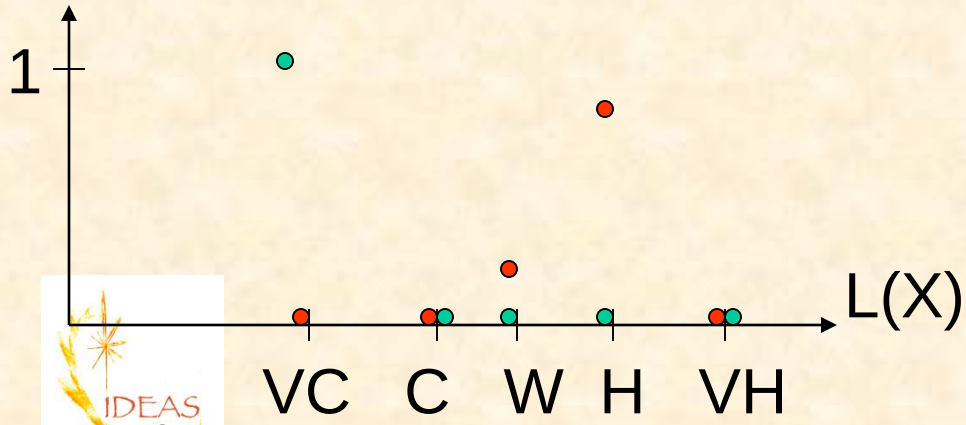
Fuzzy Description (DF) :

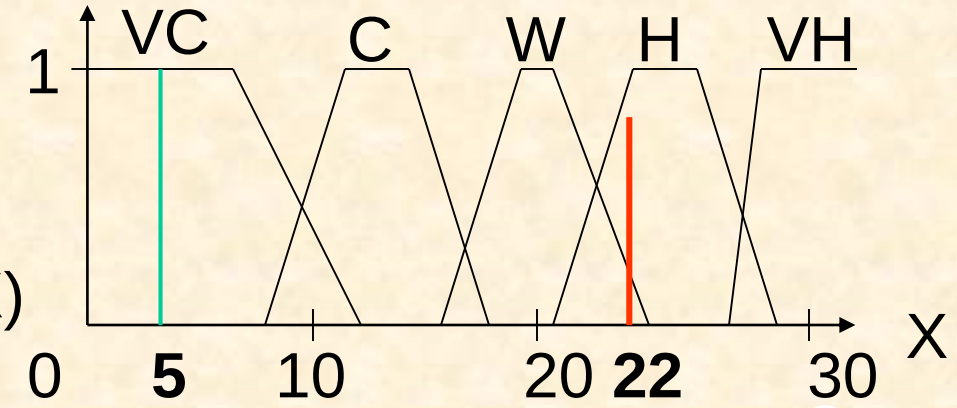
$$D_{L(x)} : X \rightarrow F(L(X))$$

$$x \rightarrow D_{L(X)}(X)$$

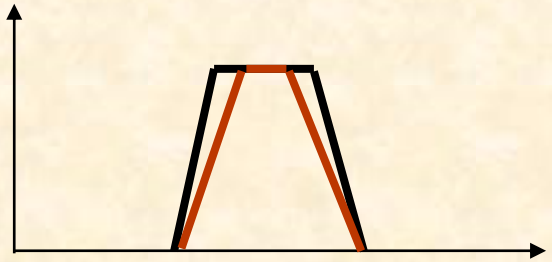
L{Very cold, cold,warm, hot, very hot} (X)=[0,30]

$\mu FD_{(5)}(L)?$ $\mu FD_{(22)}(L)?$

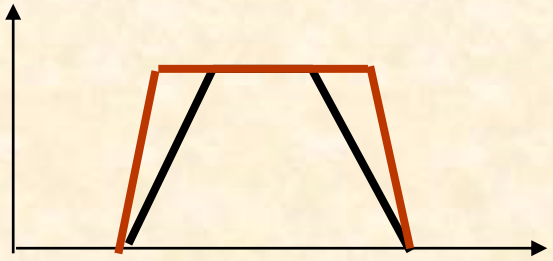




Linguistic modifiers



Affaiblissement « moins », « relatif »



Renforcement « vraiment », « très ».

Modified function

Initial function

Soit f_A la fonction d'appartenance de A et m un modifieur linguistique, la nelle fonction d'appartenance m(A) est $f_{m(A)}$.

$$f_{m(A)} = tm\ (f_A\ )$$

tm mathematical function associated to m

Example :

m=very so $f_{m(A)} = tm\ (f_A\ (x)) = (f_A\ (x))^2$

Travail sur l'algorithme de calcul associé aux ensembles flous…cf. « interface 1 test croûtage ».m
Construire fuzzy4triangle

Logique floue - Théorie (ensembles flous)

⇨ Trois intérêts principaux des ensembles flous

- Structuration des connaissances confère une tolérance à l ’imprécision.
- Transitions graduelles entre ensembles confèrent une robustesse de l ’approche.
- Information proche de celle manipulée par les opérateurs

Logique floue - Théorie (raisonnement flou)
Implications floues et modus ponens generalisé

Supposons une relation entrée/sortie entre des variables d ’un procédé. La connaissance sur ces relations peut être explicitée sous forme de règles linguistiques floues

« *SI la température de la piece est élevée ALORS le confort est mauvais* »

Si V (associé à X) est A ALORS W (associé à Y) est B

Les règles floues mises en œuvre au travers d ’un raisonnement flou représentent un lien symbolique entre des entrées/sorties d ’un système

Opérateurs logiques

R1 : **Si la couleur est *Ivoire* et la masse est *moyen*** ALORS le fromage est *peu protéolysé*.

R2 : **Si la couleur est *jaune* et la masse est *moyen*** ALORS le fromage est *moyennement protéolysé*.

R3 : **Si la couleur est *ivoire* et la masse est *faible*** ALORS le fromage est *peu protéolysé*.

R1 : Si la couleur est *Ivoire* et la masse est *moyen* ALORS le fromage est *peu protéolysé*.

R2 : Si la couleur est *jaune* et la masse est *moyen* ALORS le fromage est *moyennement protéolysé*.

R3 : Si la couleur est *ivoire* et la masse est *faible* ALORS le fromage est *peu protéolysé*.

« *SI la température de la piece est élevée ALORS le confort est mauvais* »

Si V (associé à X) est A ALORS W (associé à Y) est B

On définit une **implication floue** définie à partir de X et Y.

La valeur de vérité de la proposition floue est définie par la fonction d'appartenance f_R d'une relation floue R entre X et Y

Fuzzy implications

Main fuzzy implications

$f_{R-R}(x,y)$	$1-f_A(x)+f_A(x)f_B(y)$	Reichenbach
$f_{R-L}(x,y)$	$\min(1-f_A(x)+f_B(y),1)$	Lukasiewicz
$f_{R-M}(x,y)$	$\min(f_A(x),f_B(y))$	Mamdani
$f_{R-P}(x,y)$	$f_A(x).f_B(y)$	Larsen

Example

$$\forall y \in Y,\ f_B(y)=1$$

$$Si\ x \in [1,2],\ f_A(x)=-x+2$$

Implication of Mandani

$$f_R(x,y)=\min(f_A(x),f_B(y))$$

$$f_R(x,y)=\min(-x+2,1)$$

$$f_R(x,y)=-x+2 \quad \forall\ y \text{ and } x \in [1,2]$$

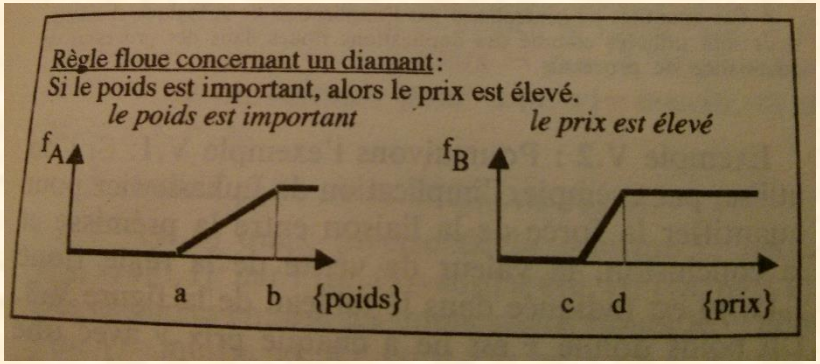


Table de vérité

Valeur de vérité		Nom
$f_{RR}(x,y)$	$1 - f_A(x) + f_A(x) \cdot f_B(y)$	Reichenbach
$f_{RW}(x,y)$	$\max(1 - f_A(x), \min(f_A(x), f_B(y))$	Willmott
$f_{RRG}(x,y)$	$\begin{cases} 1 \text{ si } f_A(x) \le f_B(y) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$	Rescher-Gaines
$f_{RKD}(x,y)$	$\max(1 - f_A(x), f_B(y))$	Kleene-Dienes
$f_{RBG}(x,y)$	$\begin{cases} 1 \text{ si } f_A(x) \le f_B(y) \\ f_B(y) \text{ sinon} \end{cases}$	Brouwer-Gödel
$f_{RG}(x,y)$	$\begin{cases} \min(f_B(y)/f_A(x), 1) \text{ si } f_A(x) \neq 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$	Goguen
$f_{RL}(x,y)$	$\min(1 - f_A(x) + f_B(y), 1)$	Lukasiewicz
$f_{RM}(x,y)$ *	$\min(f_A(x), f_B(y))$	Mamdani
$f_{RP}(x,y)$ *	$f_A(x) \cdot f_B(y)$	Larsen

x \ y	[0, c [	]c, d[	[d, ∞ [	$f_A(x)$
[0, a [				0
]a, b[				(x-a)/(b-a)
[b, ∞[				1
$f_B(y)$	0	(x-c)/(d-c)	1	

Quels résultats?

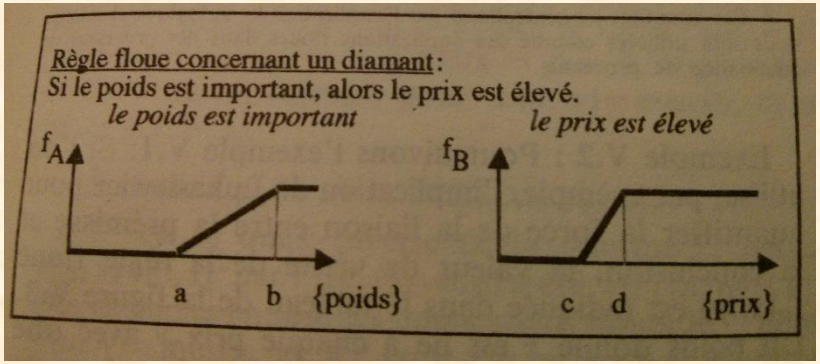
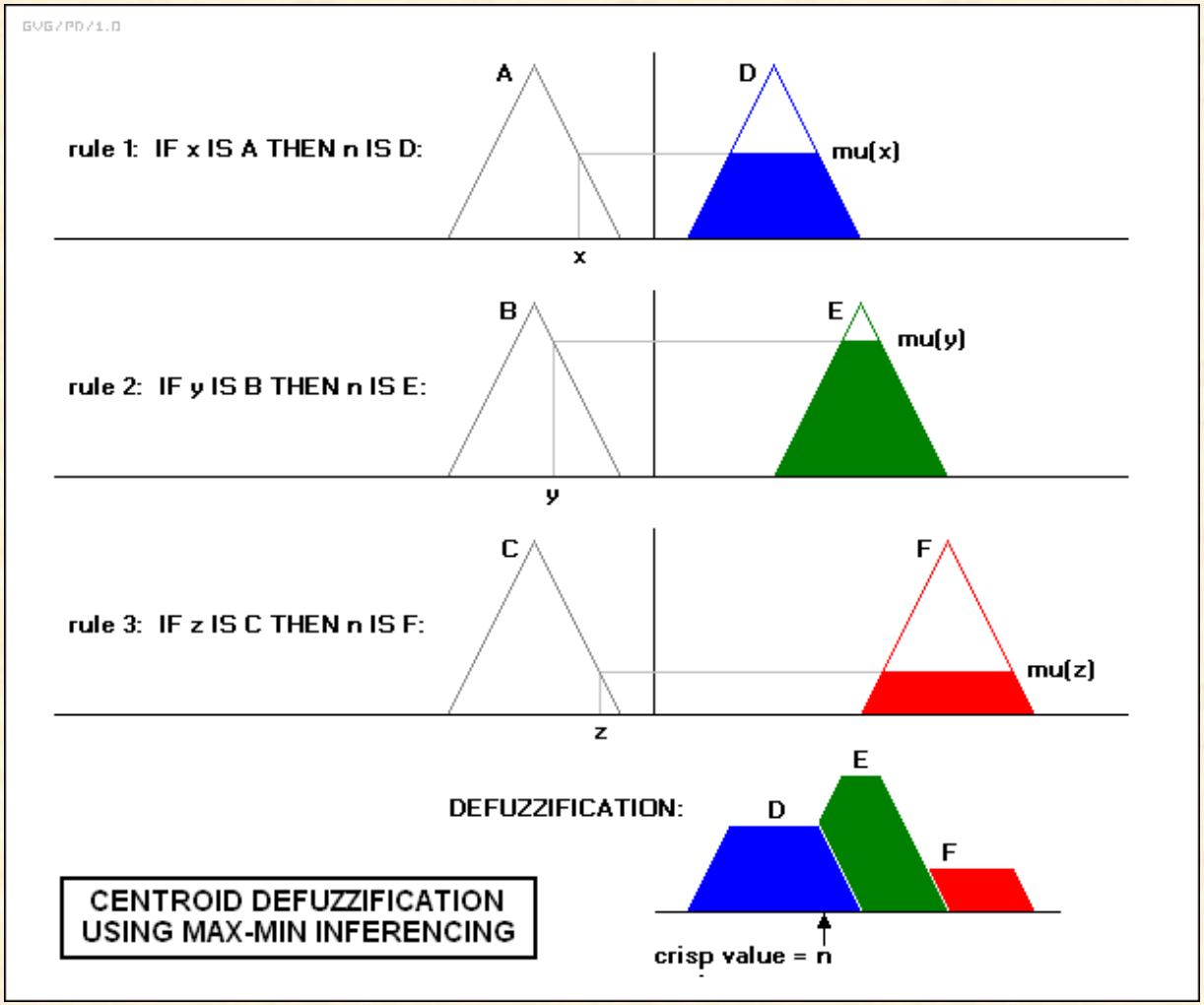


Table de vérité

Valeur de vérité		Nom
$f_{RR}(x,y)$	$1 - f_A(x) + f_A(x) \cdot f_B(y)$	Reichenbach
$f_{RW}(x,y)$	$\max(1 - f_A(x), \min(f_A(x), f_B(y))$	Willmott
$f_{RRG}(x,y)$	$\begin{cases} 1 \text{ si } f_A(x) \le f_B(y) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$	Rescher-Gaines
$f_{RKD}(x,y)$	$\max(1 - f_A(x), f_B(y))$	Kleene-Dienes
$f_{RBG}(x,y)$	$\begin{cases} 1 \text{ si } f_A(x) \le f_B(y) \\ f_B(y) \text{ sinon} \end{cases}$	Brouwer-Gödel
$f_{RG}(x,y)$	$\begin{cases} \min(f_B(y)/f_A(x), 1) \text{ si } f_A(x) \neq 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$	Goguen
$f_{RL}(x,y)$	$\min(1 - f_A(x) + f_B(y), 1)$	Lukasiewicz
$f_{RM}(x,y)$ *	$\min(f_A(x), f_B(y))$	Mamdani
$f_{RP}(x,y)$ *	$f_A(x) \cdot f_B(y)$	Larsen

x \ y	[0, c [	]c, d[	[d, ∞ [	$f_A(x)$
[0, a [	1	1	1	0
]a, b[	(b-x)/(b-a)	min(1-(x-a)/(b-a)+(y-c)/(d-c),1)	1	(x-a)/(b-a)
[b, ∞[	0	(x-c)/(d-c)	1	1
$f_B(y)$	0	(x-c)/(d-c)	1	


GVG/PD/1.0
A
D
rule 1: IF x IS A THEN n IS D:
mu(x)
x
B
E
mu(y)
rule 2: IF y IS B THEN n IS E:
y
C
F
rule 3: IF z IS C THEN n IS F:
mu(z)
z
DEFUZZIFICATION:
E
D
F
crisp value = n
CENTROID DEFUZZIFICATION
USING MAX-MIN INFERENCING

« *SI la température de la piece est élevée ALORS le confort est mauvais* »

Si V (associé à X) est A ALORS W (associé à Y) est B

f_A et f_B les fonctions d'appartenances

On parle du **modus ponens généralisé** moyennant certaines propriétés quand:

<<Un nouveau fait est observé ie

V est A' avec $f_{A'}$ pour fonction d'appartenance.

<<Conclusion W est B' avec $f_{B'}$

Fuzzy implications les plus utilisées: Mamdani ou Takagi Sugeno à sortie constante

A->B // Si A', B'?

⇨ Modus ponens pour tout x de A et y de B

Pour tout A':

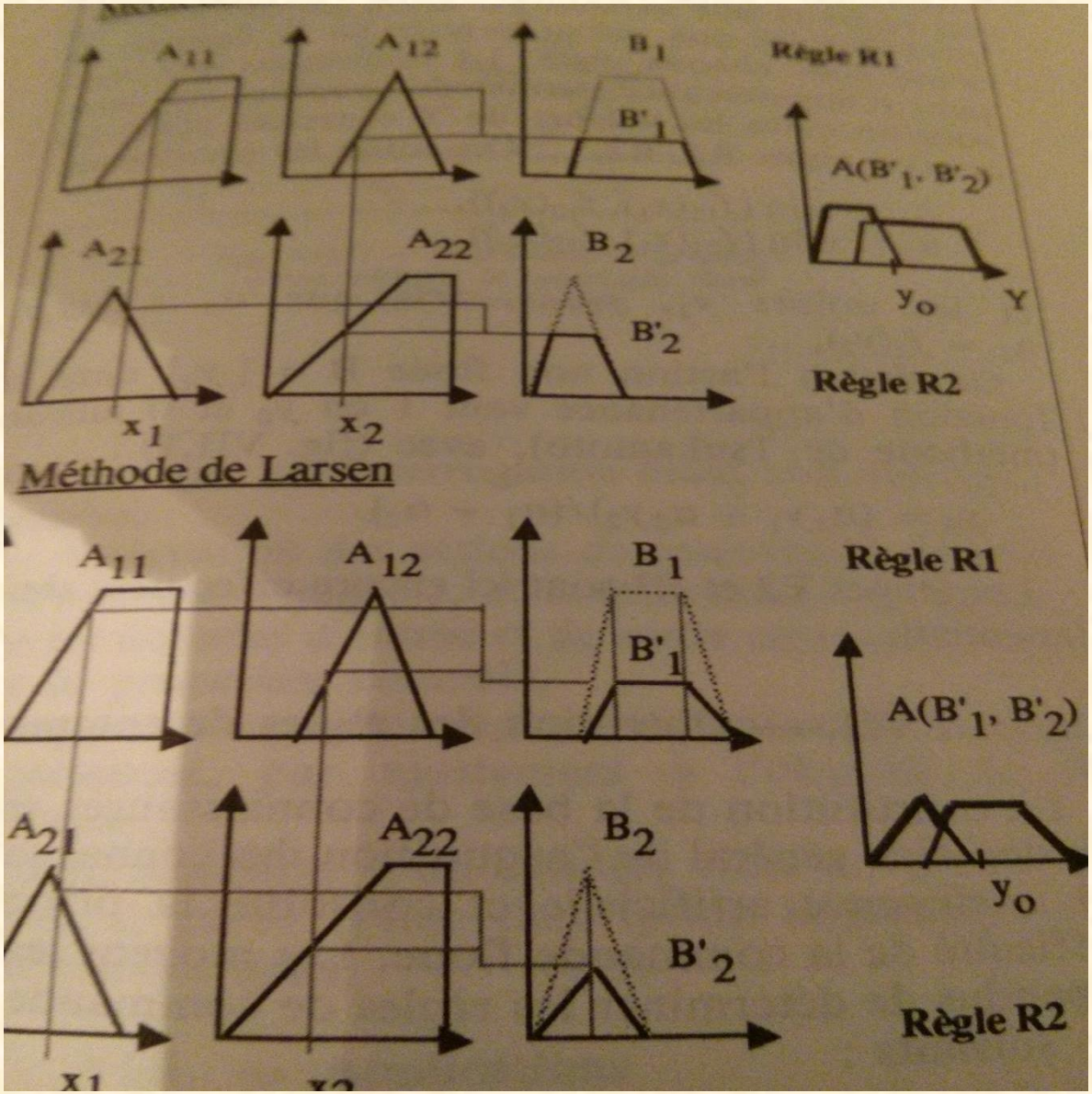
$$\forall y \in Y \; fB'(y) = \sup x \in X \; T(fA'(x), fR(x,y))$$

$$\mu_{AxB}(x,y) = \min(f_A(x), f_B(y)) \quad \textbf{Mamdani}$$

$$\mu_{B'}(y) = \max_x[\min(\mu_{A'}(x), \mu_{AxB}(x,y))] = \max_x[\min(\mu_{A'}(x), \mu_A(x), \mu_B(y))]$$
$$\Leftrightarrow \mu_{B'}(y) = \min[\mu_B(y), \max_x(\min(\mu_{A'}(x), \mu_A(x)))] \quad (1.5)$$

⇨ !!Les règles sont la plupart du temps toutes actives en même temps

Mamdani ou Takagi Sugeno à sortie constante: vision ingénieur en conduite de procédés



Logique floue - Théorie (raisonnement flou)

⇨ Composition entre les symboles/ agrégation :

max ’pour le OU ’ / min ’pour le ET’ ou
somme bornée ’pour le OU ’ / produit ’pour le ET’

R1 : Si la couleur est *Ivoire* et la masse est *moyen*
ALORS le fromage est *peu protéolysé.*
R2 : Si la couleur est *jaune* et la masse est *moyen*
ALORS le fromage est *moyennement protéolysé*.
R3 : Si la couleur est *ivoire* et la masse est *faible*
ALORS le fromage est *peu protéolysé*.

1/Ivoire

R1 : Si la couleur est *Ivoire* et la masse est *moyen*
ALORS le fromage est *peu protéolysé*.
R2 : Si la couleur est *jaune* et la masse est *moyen*
ALORS le fromage est *moyennement protéolysé*.
R3 : Si la couleur est *ivoire* et la masse est *faible*
ALORS le fromage est *peu protéolysé*.

??

Balance

300 g 0/faible+1/moyen+0/élevée

μR1 degré d'activation de la prémisse R1: μ (*Ivoire*)*μ (*moyen*)=1*1=1

μR2 et μR3???

Exemple :

R1 : Si la couleur est *Ivoire* et la masse est *moyen* alors le fromage est *peu protéolysé*.
R2 : Si la couleur est *jaune* et la masse est *moyen* alors le fromage est *moyennement protéolysé*.
R3 : Si la couleur est *ivoire* et la masse est *faible* alors le fromage est *peu protéolysé*.

Couleur
1/Ivoire

Degré de protéolyse d'un fromage
??

Balance

Masse
300 g

0/faible+1/moyen+0/élevée

Règle R1 → **1/Peu protéolysé**

Exemple :

Couleur

0,6/Ivoire +

0,4/Jaune

R1 : Si la couleur est *Ivoire* et la masse est *moyen* alors le fromage est *peu protéolysé*.
R2 : Si la couleur est *jaune* et la masse est *moyen* alors le fromage est *moyennement protéolysé*.
R3 : Si la couleur est *ivoire* et la masse est *faible* alors le fromage est *peu protéolysé*.

Degré de protéolyse d'un fromage

Balance

Masse

120 g 0,8/faible+0,2/moyen+0/élevée

μR1 = μ(ivoire)Couleur * μ(moyen)masse = 0,6*0,2 = 0,12
μR2 = μ(jaune)Couleur * μ(moyen)masse = 0,4*0,2 = 0,08
μR3= μ(ivoire)Couleur*μ(faible)masse = 0.6*0,8=0,48

Comment aller vers le degré de protéolyse??

Modus ponens généralisés

Exemple :

Couleur

0,6/Ivoire +

0,4/Jaune

R1 : Si la couleur est *Ivoire* et la masse est *moyen* alors le fromage est *peu protéolysé*.
R2 : Si la couleur est *jaune* et la masse est *moyen* alors le fromage est *moyennement protéolysé*.
R3 : Si la couleur est *ivoire* et la masse est *faible* alors le fromage est *peu protéolysé*.

Degré de protéolyse d'un fromage

Balance

Masse

120 g 0,8/faible+0,2/moyen+0/élevée

µR1 = µ(ivoire)Couleur * µ(moyen)masse = 0,6*0,2 = 0,12
µR2 = µ(jaune)Couleur * µ(moyen)masse = 0,4*0,2 = 0,08
µR3= µ(ivoire)Couleur*µ(faible)masse = 0,6*0,8=0,48

Modus ponens et activation simultanée des règles par OU:

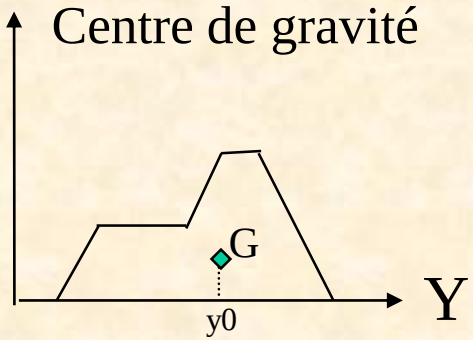
µ(peu protéolysé) = µR1 + µR3 = 0,12+0,48 =0,60
µ(moyennement protéolysé) = µR2 = 0,08

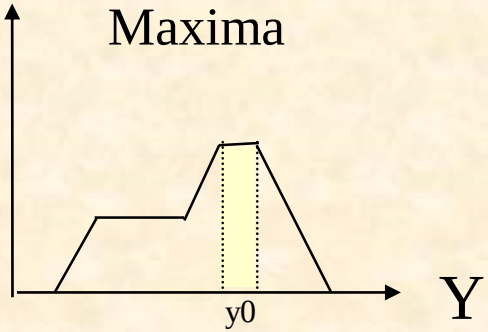
0,60/Peu protéolysé + 0,08/Moyennement protéolysé

Defuzzyfication :

Transformation d'un ensemble flou F en une sortie numérique

Méthode des maximas ou centre de gravité





Méthode des hauteurs

Valeur modale

$$y_d = \frac{\sum_{j \in J} y_j \times \mu_j}{\sum_{j \in J} \mu_j}$$

Pour notre application: 0,60/Peu protéolysé (VM =1) + 0,08/Moyennement protéolysé (VM=2)

Yd = (0,60*1+0,08*2) /0,68= 1.11

IDEE Valider

Mesure, mesure indirecte ou aide à la décision

Validation qualitative avec les experts

Validation quantitative sur base de données

Simulations

Validation sur site en déporté

Validation quantitative sur bases de données

Sur données numériques :

$$C = \sum_{i=1,2,3}^{n} d$$

Rm = réponse modèle
Ro = réponse expert

$d = 1$ si $Di \leq St$ avec $D_i = |Rm - Ro|$

$d = 0$ si $Di > St$

Sur données linguistiques :

$$E = \sum_{i=1,2,\ldots} |(\mu_{ATi} - \mu_{BTi})| / n$$

A : 0,2/petit + 0,8/moyen + 0/grand + 0/immense
B : 0/petit + 0,6/moyen + 0,4/grand + 0/immense

$$E = (|(0,2 - 0)| + |(0,8 - 0,6)| + |(0 - 0,4)|) / 3$$

$$E = (0,2 + 0,2 + 0,4) / 3 = 0,28$$

Construisez un modèle sur le croutage