ENSEMBLES DE JULIA ET DE MANDELBROT

Pierre Fatou (1878-1929)

Gaston Julia (1893-1978)

Benoit Mandelbrot (1924-)

Systèmes dynamiques

Ce sont des phénomènes qui évoluent avec le temps.

Exemple : en météorologie, en économie, en génétique des populations, en finance, sur internet, . . .

Il est parfois très difficile de faire des prévision sur ces systèmes. On a affaire à des comportements chaotiques, même pour des modèles très simples.

L'accumulation d'erreurs d'estimation ou de calcul rendent ces systèmes très sensibles aux conditions intiales :

- **conditions initiales $x_0 \rightarrow$ un comportement donné.**
- **conditions intiales $x_0 + \epsilon \rightarrow$ un comportement totalement différent.**

Comportements chaotiques, lien avec la géométrie fractale

Certains systèmes simples peuvent être modélisés comme une suite d'états :

$$x_0, \quad x_1 = f(x_0), \quad \dots \quad , x_{n+1} = f(x_n), \quad \dots$$

On définit l'orbite d'un point x_0 par l'ensemble des points de la suite précédente.

Orbite stable : si on change légèrement x_0 en $x_0 + \epsilon$, l'orbite résultante se comporte de façon "similaire" à celle de x_0.

Les orbites instables correspondent à des comportements chaotiques.

Très souvent l'ensemble des x_0 ayant une orbite instable correspond à un ensemble fractal.

On peut ainsi définir des ensembles fractals à l'aide de systèmes dynamiques.

Systèmes dynamiques complexes

Représentation des points du plan par leur coordonnées complexes :

$$\begin{aligned} z &= x + iy \quad \in C \\ ouz &= \rho(cos\theta + isin\theta) \end{aligned}$$

$$f(z) = z^2 + c$$

$$f(x, y) = (x^2 - y^2 + c_x, 2xy + c_y) \qquad pour \;\; c = c_x + ic_y$$

L'ensemble de Julia associé à c est l'ensemble des états initaux $z_0 = x_0 + iy_0$ pour lesquels le système est instable (= ensemble chaotique).

Calcul de l'ensemble de Julia

Méthode directe : BSM = Boundary Scanning Method

<u>Principe :</u> Pour chaque point de l'image, on simule l'orbite associée sur un certain nombre d'itérations. Si l'orbite s'échappe de l'image, le point reste blanc, sinon il est coloré en noir.

L'ensemble de Julia est le contour des zones noires.

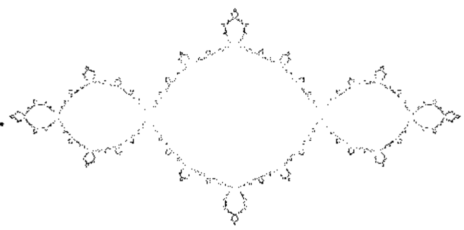
<u>Exemple :</u>

- **Domaine : $|x|$ et $|y| < 2$,**
- **30 itérations du système,**
- **si $|f^n(x+iy)| > 3$ le point est blanc, noir sinon.**

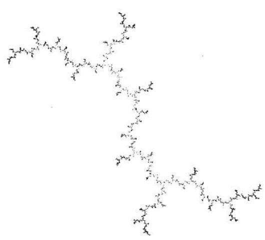
Les couleurs sont données par la vitesse de "divergence" dy système, mesurée par exemple par $|f^n(x+iy)|$, ou par le numéro d'itération auquel le système séchappe.

Exemples

$x^2 - 0.9 + 0.12i$

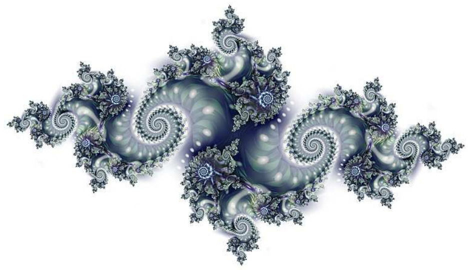


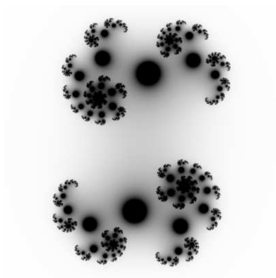
$X^2 - 1$

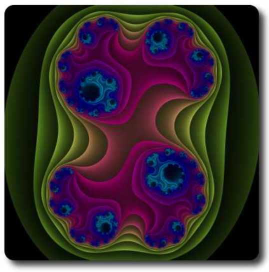


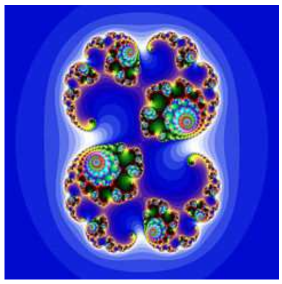
$X^2 + i$

Exemples







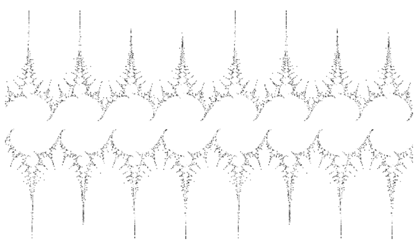


Ensemble des Julia généralisés

On peut construire des ensembles de Julia à partir d'autres fonctions complexes :

– **quotients de polynômes : "rational maps,"**

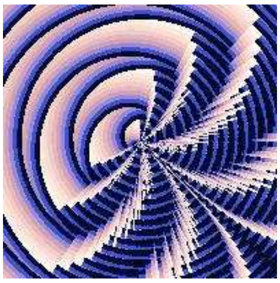
– **fonctions transcendentales :**
- λe^2
- $\lambda sinz = \lambda \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$
- $\lambda cosz = \lambda \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

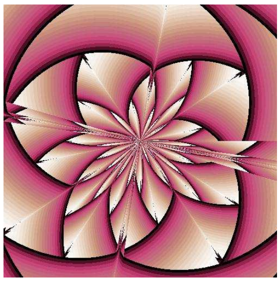


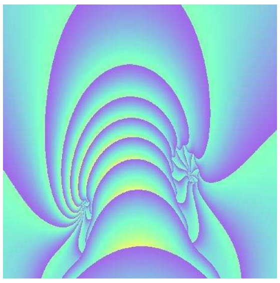
$z_{n+1} = Csin(z_n), C = 1 + 0.1i$

Fractale de Newton :
$z_{n+1} = z_n - P(z_n)/P'(z_n), P(z) = z^5 - 1$

Exemples





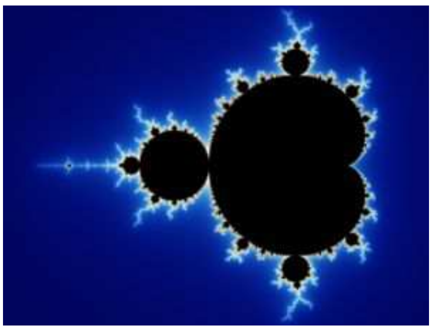


Ensemble de Mandelbrot

Si on considère l'ensemble de Julia obtenu par BSM, K_c, on peut distinguer 2 cas :

- **K_c est en un morceau (complètement connecté),**
- **K_c est constitué d'une infinité de points ($\simeq$ ensemble de Cantor).**

Benoît Mandelbrot a défini l'ensemble fractal $M = \{c \in C K_c$ est complètement connecté$\}$



Ensemble de Mandelbrot

Zoom sur une frontière de M

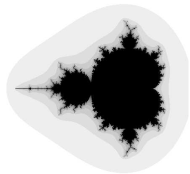
Construction de l'ensemble de Mandelbrot

On démontre que l'ensemble de Mandelbrot se définit aussi par :

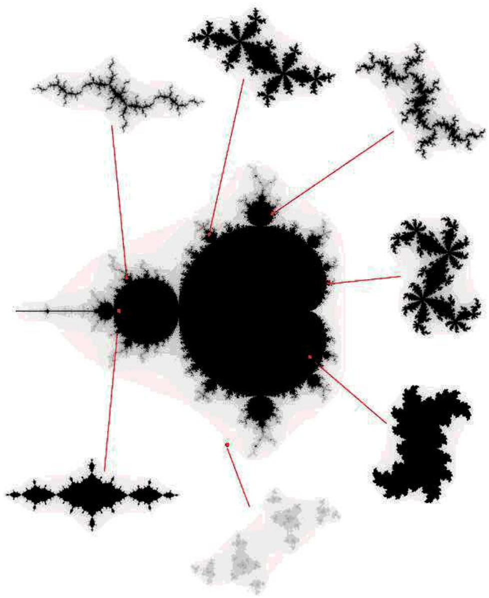
$$M = \{c \in C \ \textbf{tq} \ c \in K_c\} = \{c \in C \ \textbf{tq} \ (0,0) \in K_c\}$$

Si l'orbite $z_0 = c, \ \ z_1 = c^2 + c, ...$ **(ou de façon équivalente** $z_0 = 0, \ \ z_1 = c, \ \ z_2 = c^2 + c, ...$**) est stable, alors** $c \in M$**.**

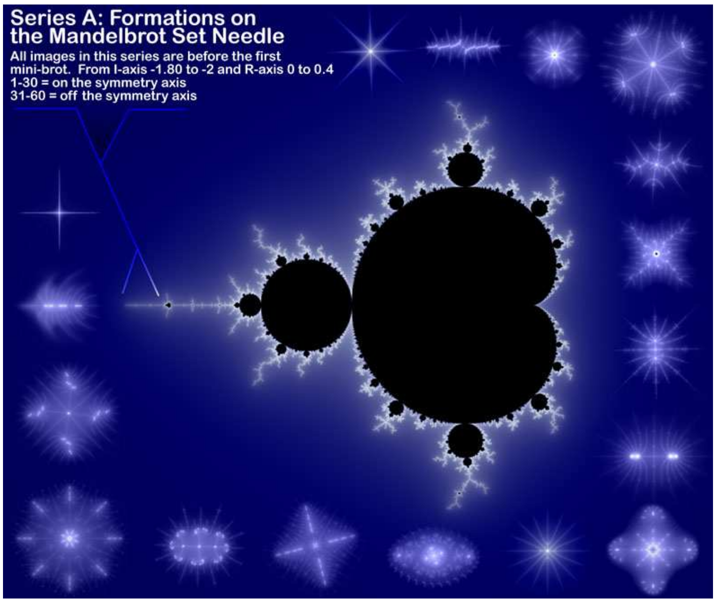
Les méthodes de calcul de l'ensemble de Mandelbrot son similaires à celles des ensembles de Julia.



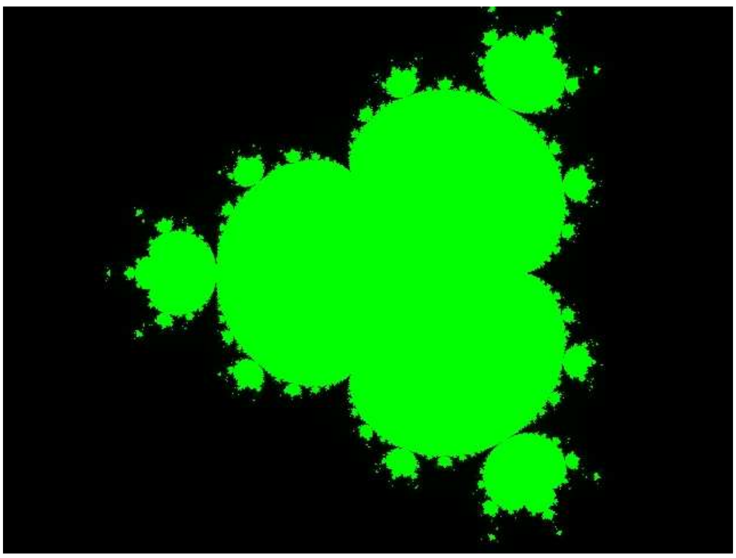
L'ensemble de Mandelbrot "résume" tous les ensembles de Julia



Les mathématiciens étudient différentes caractéristiques de l'ensemble de Mandelbrot



Autres ensembles de Mandelbrot



Ensemble de Mandelbrot avec un polynôme de degré 4 : $z^4 + c$