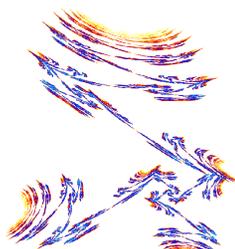


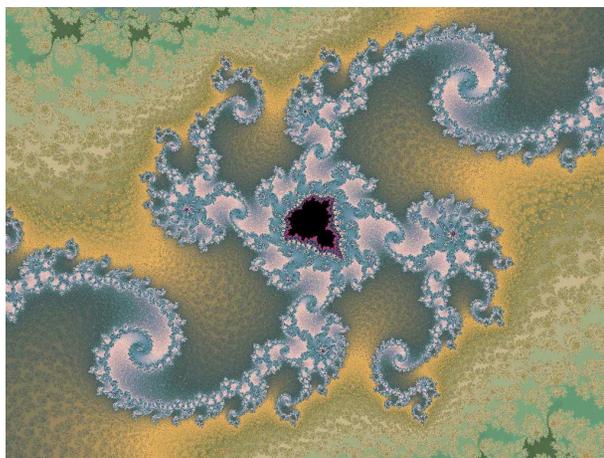
# NOTIONS DE GEOMETRIE FRACTALE



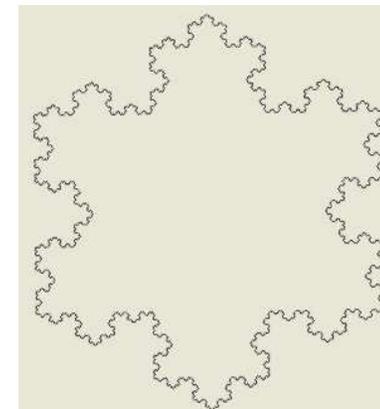
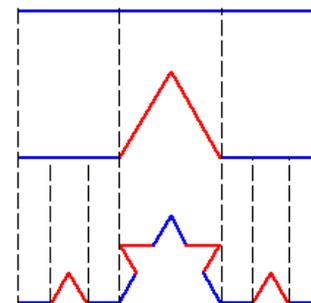
*Evelyne LUTTON – Jacques LÉVY VÉHEL*

Equipe APIS - INRIA Saclay - Ile-de-France - Evelyne.Lutton@inria.fr  
<http://complex.inria.fr/>

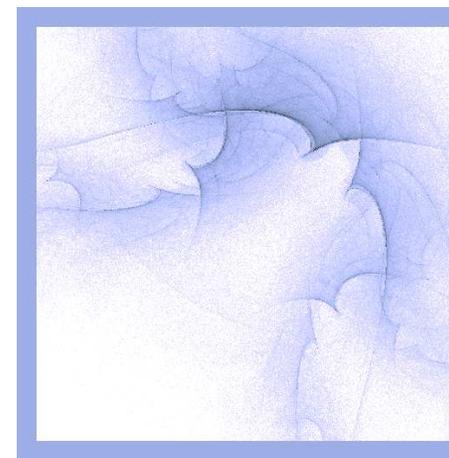
## Objets Mathématiques très complexes



## Objets Mathématiques



## Objets esthétiques

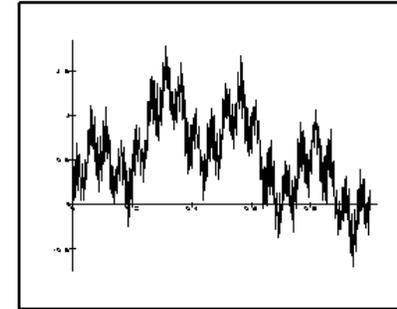
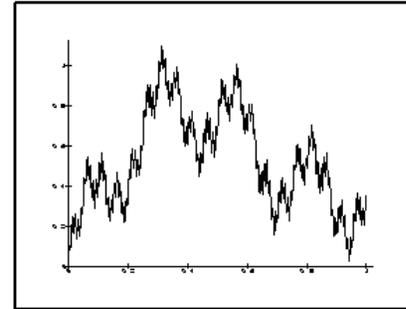


## Modèles de formes naturelles



## Fonctions de Weierstrass-Mandelbrot : continues et nulle part dérivables !

$$WM_{\lambda,H}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda^{-kH} \sin(\lambda^k t), \quad \text{où } \lambda > 1 \text{ et } H \in ]0, 1[$$



Fonctions de Weierstrass de dimension fractale (=2-H) 1.5 et 1.7

## Objets fractals : définition ?

Objets de curiosité pour les mathématiciens de la fin du XIXème (Cantor, Peano)

Notion rendue célèbre par Benoit Mandelbrot dans les années 70.

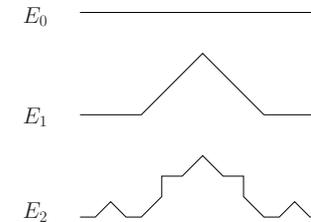
“Un objet fractal est un objet qui présente des irrégularités à toutes les échelles”

Une structure fractale est ‘la “même” de près comme de loin.

“la même” = similitude

géométrique,  
statistique,  
via des transformations,  
etc ...

## Courbe de Von Koch

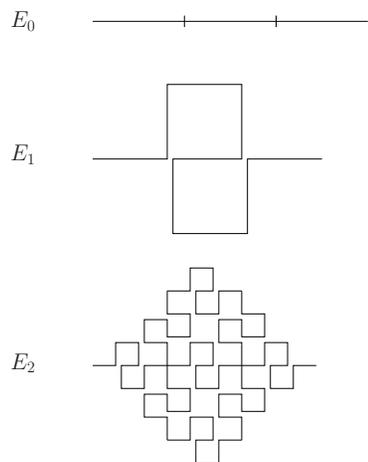


$$L(E_k) = \frac{4}{3}L(E_{k-1}) = \left(\frac{4}{3}\right)^k L(E_0) \rightarrow \infty$$

Caractéristiques :

- self similarité de rapport  $\frac{1}{3}$
- fonction nulle part dérivable

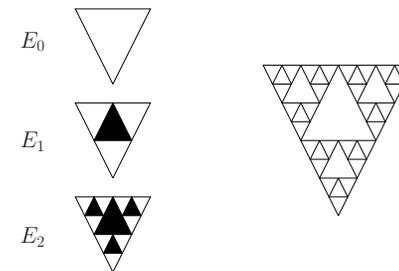
### Courbe de Peano



#### Caractéristiques :

- $L(E_0) = 1$
- $L(E_1) = 3$
- $L(E_2) = 9$
- **Dense dans un carré.**

### Triangle de Sierpinski



#### Caractéristiques :

- $S(E_k) = \frac{3}{4}S(E_{k-1}) = (\frac{3}{4})^k L(E_0) \rightarrow 0$
- **self similarité de rapport  $\frac{1}{3}$**
- **intérieur vide.**

### Mesurer la longueur de la côte de Bretagne



- 1ère méthode : on utilise un compas d'ouverture  $m$  :

$$L(m)_{m \rightarrow 0} \rightarrow \infty$$

- 2ème méthode : on recouvre la côte par des cercles de rayon  $< m$ . Même difficulté.

**La notion de dimension fractale (=dimension non entière) permet de caractériser ces courbes.**

### Notion de dimension fractale

**Intuition :** pour mesurer la dimension d'un objet on effectue un pavage avec des pavés de mesure

$$\mu_E(\epsilon) = \epsilon^{D_E}$$

On cherche  $D_E$ .

Pour une dimension arbitraire  $D$  :

$$\mathcal{M}(D) = N\epsilon^D \quad N = \text{nombre de pavés}$$

- si  $D < D_E$   $\mathcal{M}(D) \rightarrow \infty$  pour  $\epsilon \rightarrow 0$
- si  $D > D_E$   $\mathcal{M}(D) \rightarrow 0$  pour  $\epsilon \rightarrow 0$

$$D_E = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log[\mu_E(\epsilon)]}{\log(1/\epsilon)}$$

**Si  $D_E$  n'est pas entier, on parle de "forme fractale."**

**Exemple : un carré de côté  $L$**

Nombre de pavés de côté  $\epsilon$  nécessaires pour le recouvrir :  $(L/\epsilon)^2$

$$\mathcal{M} = N\epsilon^D = L^2\epsilon^{D-2}$$

$$\Rightarrow D = 2 \text{ et } \mathcal{M} = L^2$$

13

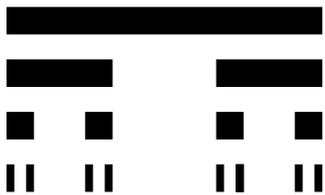
**FRACTALES DETERMINISTES : Construction itérative**

	ENSEMBLE DE CANTOR TRIADIQUE	TAMIS DE SIERPINSKI
état initial		
générateur		
division		
	<b>Rapport de déchelle = <math>\lambda</math> = rapport des tailles pour 2 résolutions successives.</b>	<b>Rapport de déchelle = <math>\lambda</math> = rapport des tailles pour 2 résolutions successives.</b>
	<b>3</b>	<b>2</b>
	<b>Rapport de masse = <math>\beta</math> = proportion de masse conservée.</b>	<b>Rapport de masse = <math>\beta</math> = proportion de masse conservée.</b>
	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$

14

**FRACTALES DETERMINISTES**

**ENSEMBLE DE CANTOR TRIADIQUE**



$$D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309\dots$$

ensemble fermé qui ne contient pas d'intervalles et dont chacun des points est un point d'accumulation

**TAMIS DE SIERPINSKI**

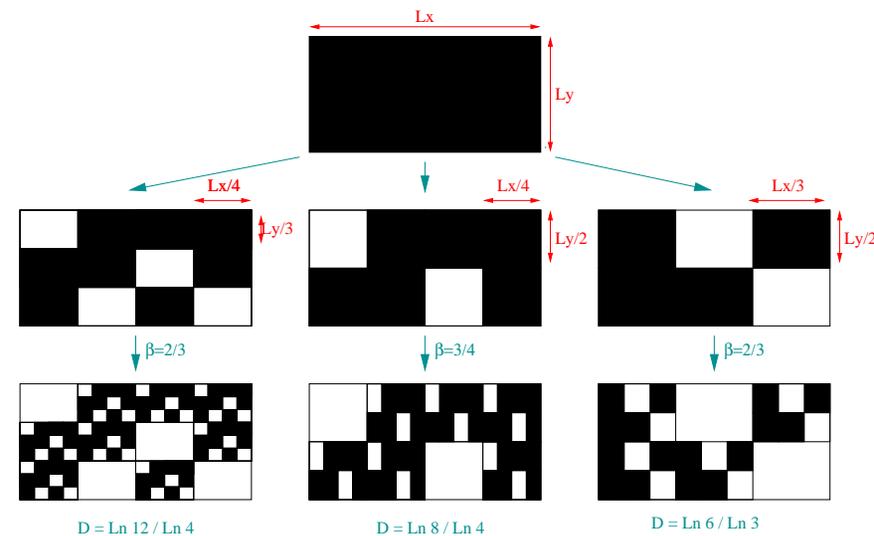


$$D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.585\dots$$

ensemble d'intérieur vide

15

**Fractales auto-affines : rapports d'échelle différents en  $x$  et  $y$**



16

Calcul de la dimension fractale pour les fractales déterministes géométriques

rapport d'échelle  $\lambda$

rapport de masse  $\beta$

$$D_F = D_T + \frac{\log \beta}{\log \lambda}$$

dimension topologique de l'espace  $D_T$

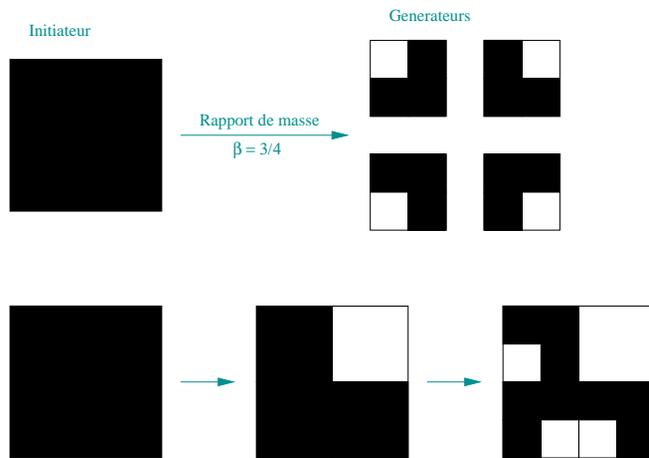
Ensemble de Cantor :

$$D_F = 1 + \frac{\log(2/3)}{\log 3} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

Triangle de Sierpinski :

$$D_F = 2 + \frac{\log(3/4)}{\log 2} = \frac{\log 3}{\log 2}$$

Fractale homogène : les rapports de masse et d'échelle sont strictement conservés



FRACTALES STATISTIQUES GEOMETRIQUES

Construction itérative :

Plusieurs configurations sont possibles pour le générateur.

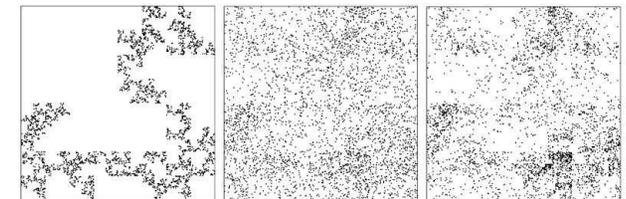
La configuration est choisie par tirage aléatoire à chaque étape.

Les cascades multiplicatives

Un segment "parent" peut créer  $\lambda$  "enfants" ( $\lambda$  est le rapport d'échelle).

Chaque segment "enfant"  $i$  est gardé avec une probabilité  $p_i$ .

Exemple pour  $\lambda = 4$  :



$(p_1, p_2, p_3, p_4) =$                        $(1, 1, 1, 0)$                        $(1, 0.75, 0.75, 0.5)$                        $(1, 0.5, 0.5, 0.25)$

## Les cascades multiplicatives de type $\beta$

Proba ( on garde le  $i^{me}$  segment ) =  $\beta$

Nombre de survivants à l'étape suivante :

$$\langle N \rangle = \lambda\beta$$

**Le rapport de masse est statistiquement conservé.**

Si  $\beta = \lambda^{-c}$

$$D_F = \frac{\log \langle N \rangle}{\log \lambda} = 1 - c$$

## Exemple : longueur d'une courbe fractale

Longueur d'une courbe fractale de dimension  $D$  mesurée à la résolution  $\epsilon$  :

$$L^\epsilon = L_0 \epsilon^{1-D}$$

$$L^{\epsilon'} = \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right)^{1-D} L^\epsilon$$

Ici, l'opérateur  $G$  est très simple.

## Utiliser l'analyse fractale

- en physique, en chimie,
- en traitement du signal, des images.

On analyse les phénomènes complexes en essayant de trouver les **quantités pertinentes** qui possèdent une propriété **d'invariance d'échelle généralisée**.

Une grandeur  $f^\epsilon$ , fonction de la résolution  $\epsilon$  possède une invariance d'échelle généralisée si

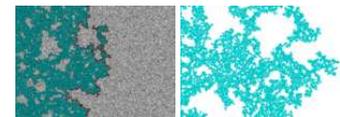
$$f^{\epsilon'} = G_{\epsilon'/\epsilon}[f^\epsilon]$$

## Analyse fractale : le principe

- Identifier les variables qui suivent une loi d'échelle.
- Donner une expression de l'opérateur d'invariance  $G$ .

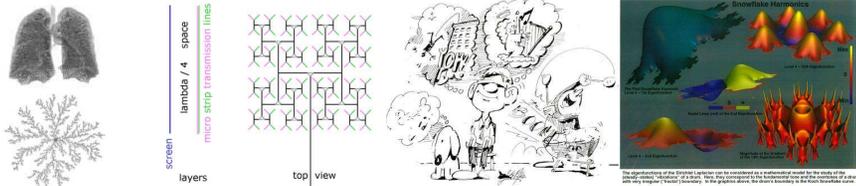
De nombreuses propriétés découlent du comportement d'invariance d'échelle.

**Exemple :** dans un amas de percolation, les modes de vibration sont localisés suivant une loi qui peut déduire de  $D$ .



Quelques domaines d'application

- Physique : percolation, fractures de matériaux.
- Prédiction : finance (pricing d'options), trafic routier.
- Traitement du signal : segmentation d'images, synthèse vocale.



crédits photos Michel Lapidus

NOTIONS DE DIMENSION

$\delta$ -recouvrement

Soit  $F$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , et  $s$  un réel positif ou nul.

Soit  $\delta$  un réel positif. Un  $\delta$ -recouvrement de  $F$  est un ensemble dénombrable d'ensembles  $U_i$  de diamètre inférieur ou égal à  $\delta$  tel que  $F \subset \sum_{i=1}^{\infty} U_i$ .

On définit :

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s, \{U_i\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } F \right\}$$

C'est-à-dire qu'on regarde tous les  $\delta$ -recouvrements de  $F$ , et on cherche à minimiser la somme des puissances  $s$ -ième des diamètres.

Mesure de Hausdorff

$$\forall \delta, \delta' \quad \delta' < \delta \Rightarrow H_{\delta'}^s(F) \geq H_\delta^s(F)$$

Quand  $\delta$  décroît, la classe des recouvrements admissibles diminue, et donc l'infimum augmente. Précisément  $H_\delta^s(F)$  est une fonction non croissante de  $\delta$ , elle a donc une limite en  $\delta = 0^+$  :

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F)$$

Cette limite existe, pour tout sous-ensemble  $F$  de  $\mathbb{R}^n$ , dans  $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ .

$H^s(F)$  est appelé la mesure de Hausdorff  $s$ -dimensionnelle de  $F$ .

### Exemple 1

Dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $F = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ .

Quelle est la mesure de Hausdorff de dimension 0 d'un ensemble discret ?

$H^0(F)$  ?

On prend un recouvrement particulier :  $U_i = \{\text{centré en } a_i, \text{ de rayon } \frac{\delta}{2}\}$

$$H_\delta^s(F) = \inf\{\dots\} \leq \sum_i |U_i|^s = k\delta^s$$

Quand  $\delta \rightarrow 0$  :

$$- H^s(F) = 0 \text{ si } s > 0$$

$$- H^0(F) \leq k \text{ si } s = 0$$

Réciproquement, il faut toujours au moins  $k$  intervalles pour recouvrir  $F$  à partir du moment où  $\delta < \inf\{d(a_i, a_j)\}$ , donc  $H_\delta^s(F) \geq k$

$$\Rightarrow H^0(F) = k$$

### Propriété d'échelle de la mesure de Hausdorff

$$F \subset \mathbb{R}^n, \lambda > 0 \quad H^s(\lambda F) = \lambda^s H^s(F)$$

$$\lambda F = \{\lambda x, x \in F\}$$

- Soit  $\{U_i\}$  un  $\delta$ -recouvrement de  $F$ , alors  $\{\lambda U_i\}$  un  $\lambda\delta$ -recouvrement de  $\lambda F$

$$\forall \delta \sum |\lambda U_i|^s \leq \lambda^s \sum |U_i|^s \Rightarrow H_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \lambda^s H_\delta^s(F)$$

$$\delta \rightarrow 0, \quad H^s(\lambda F) \leq \lambda^s H^s(F)$$

- Le même raisonnement pour  $\{1/\lambda U_i\}$  conduit à l'autre inégalité, d'où le résultat.

### Exemple 2

$F = [a, b] \in \mathbb{R}$

Quelle est la mesure de Hausdorff de dimension 1 d'un intervalle ?

$H^1([a, b])$  ?

On considère le recouvrement par  $n$  intervalles,  $n \leq \frac{b-a}{\delta}$  pour  $b \geq a$  :

-  $U_i = [a + (i-1)\delta, a + i\delta]$  de taille  $\delta$ ,

-  $U_n = [a + (n-1)\delta, b]$  de taille  $< \delta$

Alors  $|U_i|^s \leq n\delta^s \leq (b-a)\delta^{s-1}$ .

Quand  $\delta \rightarrow 0$  :

$$- H^s(F) = 0 \text{ si } s > 1$$

$$- H^1(F) \leq (b-a) \text{ si } s = 1$$

Réciproquement, pour  $\delta = |b-a|$ ,  $F$  est son propre  $\delta$ -recouvrement.

Pour tout  $\delta' \leq |b-a|$ ,  $H_{\delta'}^1(F) \geq (b-a)$ . Donc, quand  $\delta' \rightarrow 0$   $H^1(F) \geq (b-a)$

$$\Rightarrow H^1(F) = |b-a|$$

### Propriétés des ensembles transformés

Soit  $F \subset \mathbb{R}^n$ .

Si  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ , est **Höldérienne**, c'est-à-dire  $\exists C, \alpha$  tel que :  $\forall (x, y) \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$

$$\text{alors} \quad H^{s/\alpha}(f(F)) \leq C^{s/\alpha} H^s(F)$$

- en particulier, si  $\alpha = 1$ , c'est-à-dire si  $f$  est **Lipschitzienne** :

$$\text{alors} \quad H^s(f(F)) \leq C^s H^s(F)$$

- Si de plus  $C=1$ ,  $f$  est une **isométrie** :

$$\text{alors} \quad H^s(f(F)) = H^s(F)$$

Conservation de la mesure de Hausdorff par transformation par une isométrie.

### Démonstration pour une fonction Höldérienne

Soit  $F \subset \mathbb{R}^n$ .

Si  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ , est **Höldérienne**, c'est-à-dire  $\exists C, \alpha$  tel que :  $\forall(x, y) \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$

Soit  $\{U_i\}$  un  $\delta$ -recouvrement de  $F$ , alors  $\{f(U_i)\}$  un  $C\delta^\alpha$ -recouvrement de  $f(F)$  :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(U_i)|^s \leq \sum_{i=1}^{\infty} C^s |U_i|^{s\alpha}$$

infimum :  $\Rightarrow H_{C\delta^\alpha}^s(f(F)) \leq C^s H_\delta^{s\alpha}(F)$

$\alpha > 0$   
 $\delta \rightarrow 0 \Rightarrow H^s(f(F)) \leq C^s H^{s\alpha}(F)$

### Comportement de la mesure de Hausdorff vis à vis de la dimension $s$

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s, \{U_i\} \delta\text{-recouvrement de } F \right\}$$

Pour  $\delta < 1$ ,  $H_\delta^s$  est une **fonction non croissante de  $s$** , de même pour  $H^s$  :

$s' < s, \delta < 1 \Rightarrow |U_i| < 1 \Rightarrow |U_i|^s \leq |U_i|^{s'} \text{ donc } H_\delta^s(F) \leq H_\delta^{s'}(F)$

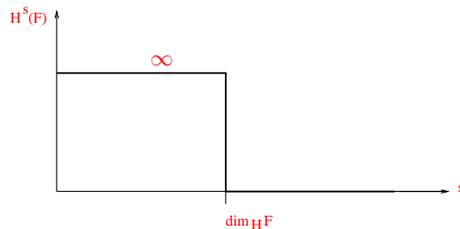
Soit  $t > s$  :

$\sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s \text{ donc : } H_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(F)$

- Si  $H^s(F) < \infty$ , alors  $H^t(F) = 0$  pour  $t > s$ ,
- Si  $H^t(F) < \infty$ , alors  $H^s(F) = \infty$

### Dimension de Hausdorff

$H^s(F)$  a donc l'allure suivante :



C'est-à-dire qu'il y a une valeur critique  $s$  telle que pour  $t < s$ ,  $H^t(F) = \infty$ , et pour  $t > s$ ,  $H^t(F) = 0$ .

Cette valeur critique est appelée dimension de Hausdorff de  $F$ .

### Mesure de Hausdorff

$$\dim_H F = \inf\{s | H^s(F) = 0\} = \sup\{s | H^s(F) = \infty\}$$

donc :  $H^s(F) = \infty$  si  $s < \dim_H F$   
 $H^s(F) = 0$  si  $s > \dim_H F$

pour  $s = \dim_H F$ ,  $H^s(F)$  peut valoir 0,  $\infty$  ou une valeur finie.

Si  $s$  a une valeur finie,  $F$  est un  $s$ -ensemble : les "objets usuels" sont des  $s$ -ensembles.

Exemple :  $F =$  disque unité dans  $\mathbb{R}^3$ .

$H^1(F) = \infty$   
 $H^2(F) = \frac{\pi}{4}$  aire de  $F$       Ainsi  $\dim_H(F) = 2$ .  
 $H^3(F) = 0$

### Propriétés de la dimension de Hausdorff

1. si  $F \subset \mathbb{R}^n$  est **ouvert**, alors  $\dim_H F = n$   
(car  $F$  contient une boule de volume  $n$ -dimensionnel non nul).

2. si  $F$  est une **variété différentiable de dimension  $m$** ,  $\dim_H F = m$ .

3. si  $E \subset F$ ,  $\dim_H E \leq \dim_H F$

4. Soit  $F_1, \dots, F_j, \dots$  un ensemble dénombrable de sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ , alors :

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i \leq \infty} (\dim_H F_i)$$

5. Si  $F$  est **dénombrable**,  $\dim_H F = 0$ .

### Propriété 5

$$F_i = \{x_i\} \quad H^0(F) = 1 \Rightarrow \dim_H F_i = 0$$

$$F = \{x_1, \dots, x_n, \dots\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

D'après 4 :

$$\dim_H F = \sup \dim_H F_i = 0$$

### Propriété 4

$$\begin{aligned} \dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i &\geq \sup_{1 \leq i \leq \infty} (\dim_H F_k) \quad \forall k \quad (F_k \subset \bigcup F_i) \\ &\Rightarrow \dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \sup_{1 \leq i \leq \infty} (\dim_H F_i) \end{aligned}$$

Soit  $s > \dim_H F_i, \forall i$  (on se place au dessus de la valeur de coupure)  $\Rightarrow H^s(F_i) = 0$

$$\Rightarrow H^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum H^s(F_i) = 0 \quad (\text{on se trouve donc aussi au dessus de la valeur de coupure})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i &\leq s \\ &\leq \sup_{1 \leq i \leq \infty} (\dim_H F_i) \end{aligned}$$

### Dimensions des ensembles transformés

- Si  $f$  est **Höldérienne**

$$\dim_H[f(F)] \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(F)$$

- Si  $f$  est **Lipschitzienne** ( $\alpha = 1$ )

$$\dim_H[f(F)] \leq \dim_H(F)$$

- Si  $f$  est **bi-Lipschitzienne**

$$\dim_H[f(F)] = \dim_H(F)$$

**Pour deux ensembles de dimensions différentes, il n'existe pas de transformation bi-Lipschitzienne pour passer de l'un à l'autre.**

### Démonstration

**Mesure de Hausdorff**  $H^{s/\alpha}[f(F)] \leq c^{s/\alpha} H^s(F)$

$$s > \dim_H F \Rightarrow \begin{aligned} H^s(F) &= 0 \\ H^{s/\alpha}[f(F)] &= 0 \end{aligned} \quad \frac{s}{\alpha} \text{ est au dessus de la valeur de coupure}$$

$$\dim_H[f(F)] \leq \frac{s}{\alpha}$$

$$\dim_H[f(F)] \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(F)$$

### Ensemble de Cantor triadique

**Caractérisation de  $E$  à l'aide de la décomposition en base 3 :**

$$x \in E_0 : x = a_1 3^{-1} + a_2 3^{-2} + a_3 3^{-3} + \dots$$

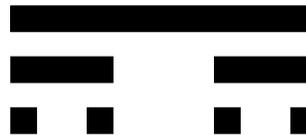
$$x \in E_1 : a_1 = 0 \text{ ou } 2$$

$$x \in E_2 : a_1 = 0 \text{ ou } 2 \text{ et } a_2 = 0 \text{ ou } 2$$

etc ...

**$E$  = points dont le développement en base 3 ne contient pas 1.**

### Ensemble de Cantor triadique



$$\begin{aligned} E_0 &= [0, 1] \\ E_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\ E_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \end{aligned}$$

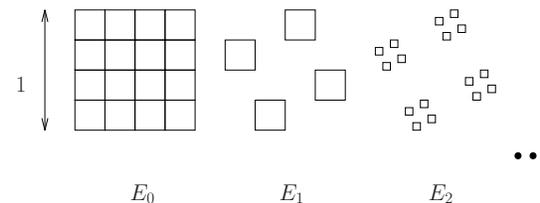
$E_k$  contient  $2^k$  intervalles de longueurs  $3^{-k}$ .

$$E = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$$

$E$  est composé d'une infinité non dénombrable de points.

$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x)$  contient une infinité de points de  $E$ .

### Variante bidimensionnelle de l'ensemble de Cantor



A chaque étape, on coupe chaque carré en 16 sous-carrés, dont on en conserve 4, comme illustré.

Alors  $1 \leq H^1(F) \leq \sqrt{2}$  et donc :  $\dim_H F = 1$

### Démonstration

1. On couvre  $E$  par  $4^k$  carrés de taille  $4^{-k}$  donc de  $\delta = 4^{-k}\sqrt{2}$  à l'étape  $E_k$

$$\text{alors } H^{\frac{1}{2}}(E) \leq 4^k \delta \leq 4^k 4^{-k} \sqrt{2}$$

Quand  $k \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$  donc  $H^1(E) \leq \sqrt{2}$

2. Soit  $p$  la projection de  $E$  sur l'axe des  $x$ .

On a :  $|p(x) - p(y)| \leq |x - y| \implies p$  est Lipschitzienne.

Or :

$$\begin{aligned} p(E) &= [0, 1] \\ 1 &= \mathcal{L}[0, 1] = H^1[0, 1] \\ &= H^1(p(E)) \leq H^1(E) \end{aligned}$$

### Ensemble de Cantor triadique



$$\text{Alors } \dim_H E = \frac{\log 2}{\log 3} \quad \frac{1}{2} \leq H^s(F) \leq 1$$

### Démonstration

$E$  se divise en 2 parties  $E_L \subset [0, \frac{1}{3}], E_R \subset [\frac{2}{3}, 1]$

$E_L$  et  $E_R$  sont identiques à  $E$ , avec 1 facteur d'échelle de  $\frac{1}{3}$ . De plus :

$$E = E_L \cup E_R \quad \text{et} \quad E_L \cap E_R = \emptyset$$

Donc :

$$\forall s, H^s(E) = H^s(E_L) + H^s(E_R) = \left(\frac{1}{3}\right)^s H^s(E) + \left(\frac{1}{3}\right)^s H^s(E)$$

parce que  $E_L = \frac{1}{3}E, E_R = \frac{1}{3}E$ .

Si  $H^{\dim_H(E)}$  est finie, alors  $1 = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^s \implies s = \log 2 / \log 3$

(La démonstration que  $H^{\dim_H(E)}$  est finie est omise)

### Une autre dimension fractale : la dimension de boîtes

Soit  $F \subset \mathbb{R}^n$  borné non vide.

Soit  $N_\delta(F)$  le nombre minimum d'ensembles de diamètres  $= \delta$  pouvant couvrir  $F$ .

La dimension inférieure de boîtes est :

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log \delta}$$

La dimension supérieure de boîtes est :

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log \delta}$$

Si ces 2 limites sont égales, la dimension de boîtes est :

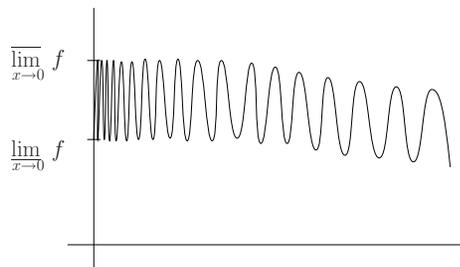
$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log \delta}$$

## Rappel

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} (\sup\{f(x), 0 < x < r\})$$

$\forall f, \underline{\lim} f$  et  $\overline{\lim} f$  existent dans  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

Si  $\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} f = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f$  alors  $\lim_{x \rightarrow 0} f$  existe.



## Définitions équivalentes

Soit les hypercubes linéaires de taille  $\delta$  (i.e. définis sur une grille) :

$$[m_1\delta, (m_1+1)\delta] \times \dots \times [m_n\delta, (m_n+1)\delta]$$

On peut se restreindre à ces recouvrements, c'est-à-dire :

$$\underline{\dim}_B(F) = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B(F) = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log \delta}$$

avec  $N'_\delta(F)$  = nombre d'hypercubes de taille  $\delta$  qui intersectent  $F$ .

## Définitions équivalentes

On a en fait les équivalences suivantes :

$$\underline{\dim}_B = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log \delta} \quad \overline{\dim}_B = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{\log \delta}$$

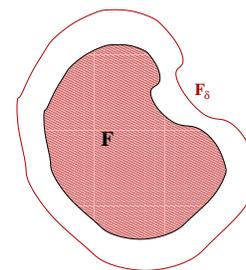
où  $N_\delta(F)$  est :

- Le + petit nombre de boules fermées de rayon  $\delta$  qui couvrent  $F$ .
- Le + petit nombre de cubes de taille  $\delta$  qui couvrent  $F$ .
- Le nombre de cubes de taille  $\delta$  qui intersectent  $F$ .
- Le + petit nombre d'ensembles de diamètre  $\leq \delta$  qui couvrent  $F$ .
- Le + grand nombre de boules disjointes de rayon  $\delta$  qui ont leur centre sur  $F$ .

## Ensemble $\delta$ -parallèle

$F_\delta$  est l'ensemble des points qui se trouvent à une distance maximale  $\delta$  de  $F$  :

$$A_\delta = \{x / |x - y| \leq \delta \text{ pour } y \in A\}$$



$$\underline{\dim}_B F = n - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathbf{Vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B F = n - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathbf{Vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

### Exemple : ensemble de Cantor

$$\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = \log 2 / \log 3$$

#### Démonstration :

On recouvre  $E_k$  par  $2^k$  intervalle de taille  $3^{-k}$ .

$$N_\delta(F) \leq 2^k \text{ si } 3^{-k} \leq \delta \leq 3^{-k+1}$$

$$\overline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log \delta} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

D'autre part, tout intervalle de longueur  $\delta$ ,  $3^{-k+1} \leq \delta \leq 3^{-k}$ , intersecte au plus un des intervalles de longueur  $3^{-k}$  de  $F$ .

Il y a  $2^k$  tels intervalles, donc il faut au moins  $2^k$  intervalles de longueur  $\delta$  pour couvrir  $F$ .

$$\text{Donc : } N_\delta(F) \geq 2^k \implies \underline{\dim}_B(F) \geq \log 2 / \log 3.$$

$\dim_H$  et  $\dim_B$  différent

Si  $F$  est dense dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\dim_B F = n$

En particulier  $F = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  :

comme  $\overline{F} = [0, 1]$ , on a

$$\dim_B F = 1$$

$$\dim_H F = 0$$

### Comportements aux "frontières" des ensembles

Soit  $\overline{F}$  la fermeture de  $F$ .

$$\frac{\underline{\dim}_B \overline{F}}{\underline{\dim}_B \overline{F}} = \frac{\underline{\dim}_B F}{\underline{\dim}_B F}$$

#### Démonstration :

Soit  $B_1, \dots, B_2$ , un ensemble de boules fermées de rayon  $\delta$ .

Si  $\bigcup_{i=1}^k B_i$  recouvre  $F$ , comme  $\bigcup_{k=1}^k B_i$  est fermé, il recouvre aussi  $\overline{F}$ .

Donc le plus petit nombre de boules de rayon  $\delta$  qui recouvrent  $F$  est suffisant pour recouvrir  $\overline{F}$ .

## CALCUL PRATIQUE DES DIMENSIONS

## Méthodes des boîtes

On recouvre le plan par une grille de pas  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  grand.

On compte le nombre de cases  $N(\varepsilon)$  qui intersectent la courbe.

Puis, on utilise une grille de résolution moitié, et on recalcule  $N = N(\frac{\varepsilon}{2})$ .

... Et ainsi de suite jusqu'à la résolution du pixel.

Si la courbe est fractale, le graphe de  $\text{Log}(N(\varepsilon))$  en fonction de  $\text{Log}(\frac{1}{\varepsilon})$  est une droite de pente  $D$ .

---

## Méthodes des variations

C'est un raffinement de la méthode précédente.

On appelle  $\varepsilon$  oscillation d'une fonction  $f$  de  $C^0[0, 1]$  la quantité :

$$V_\varepsilon(x) = \sup_{x-\varepsilon < x' < x+\varepsilon} f(x') - \inf_{x-\varepsilon < x' < x+\varepsilon} f(x')$$

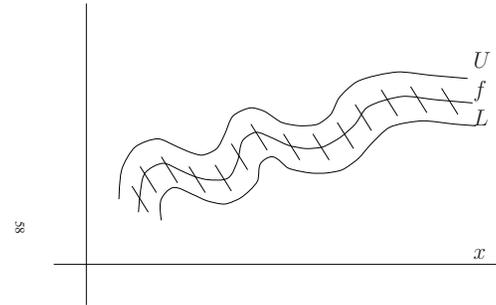
$L^\varepsilon$ -variation est définie par :

$$V(\varepsilon, f) = \int_0^1 v_\varepsilon(x) dx$$

$D$  est la pente de  $(\log \frac{1}{\varepsilon}, \log(\frac{1}{\varepsilon^2} V(\varepsilon, f)))$ .

---

## Méthodes des couvertures



On pose  $U(x, 0) = L(x, 0) = f(x)$

Et on définit récursivement  $U$  et  $L$  par :

$$U(x, \varepsilon + 1) = \max(U(x, \varepsilon) + 1, \max_{x-1 < x' < x+1} f(x'))$$
$$L(x, \varepsilon + 1) = \min(L(x, \varepsilon) - 1, \min_{x-1 < x' < x+1} f(x'))$$

La couverture est la région comprise entre  $U$  et  $L$ , de surface  $S(\varepsilon)$ .

Cette fois, on s'intéresse au rapport  $L(\varepsilon) = \frac{S(\varepsilon)}{2\varepsilon}$ .

$D$  est encore la pente de  $\text{Log}L$  versus  $\text{Log}(\frac{1}{\varepsilon})$ .

---

## Méthode morphologique

Elle fonctionne sur le même principe que la méthode des couvertures, mais au lieu d'utiliser  $U$  et  $L$ , on définit la surface par des dilations successives de la courbe.

---

## Méthode spectrale

Quand la fractale peut être assimilée à un mouvement brownien, on montre que sa densité de puissance  $S(f)$  est proportionnelle à

$$\frac{1}{f^{2D+1}}$$

## Systèmes dynamiques

Ce sont des phénomènes qui évoluent avec le temps.

Exemple : en météorologie, en économie, en génétique des populations, en finance, sur internet, ...

Il est parfois très difficile de faire des prévisions sur ces systèmes. On a affaire à des **comportements chaotiques**, même pour des modèles très simples.

L'accumulation d'erreurs d'estimation ou de calcul rendent ces systèmes très sensibles aux conditions initiales :

- conditions initiales  $x_0 \rightarrow$  un comportement donné.
- conditions initiales  $x_0 + \epsilon \rightarrow$  un comportement totalement différent.

## ENSEMBLES DE JULIA ET DE MANDELBROT



Pierre Fatou (1878-1929)



Gaston Julia (1893-1978)



Benoit Mandelbrot (1924-2013)

## Comportements chaotiques, lien avec la géométrie fractale

Certains systèmes simples peuvent être modélisés comme une suite d'états :

$$x_0, x_1 = f(x_0), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$$

On définit l'orbite d'un point  $x_0$  par l'ensemble des points de la suite précédente.

**Orbite stable** : si on change légèrement  $x_0$  en  $x_0 + \epsilon$ , l'orbite résultante se comporte de façon "stable" à celle de  $x_0$ .

Les **orbites instables** correspondent à des comportements chaotiques.

Très souvent l'ensemble des  $x_0$  ayant une orbite instable correspond à un ensemble fractal.

On peut ainsi définir des ensembles fractals à l'aide de systèmes dynamiques.

## Systèmes dynamiques complexes

Représentation des points du plan par leur coordonnées complexes :

$$z = x + iy \in \mathbb{C}$$

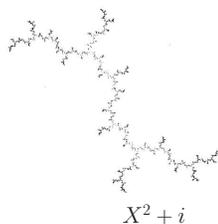
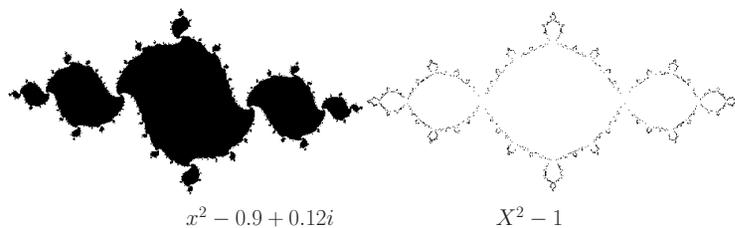
$$\text{ou } z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$f(z) = z^2 + c$$

$$f(x, y) = (x^2 - y^2 + c_x, 2xy + c_y) \quad \text{pour } c = c_x + ic_y$$

L'ensemble de Julia associé à  $c$  est l'ensemble des états initiaux  $z_0 = x_0 + iy_0$  pour lesquels le système est instable (= ensemble chaotique).

### Exemples



## Calcul de l'ensemble de Julia

Méthode directe : BSM = Boundary Scanning Method

**Principe :** Pour chaque point de l'image, on simule l'orbite associée sur un certain nombre d'itérations. Si l'orbite s'échappe de l'image, le point reste blanc, sinon il est coloré en noir.

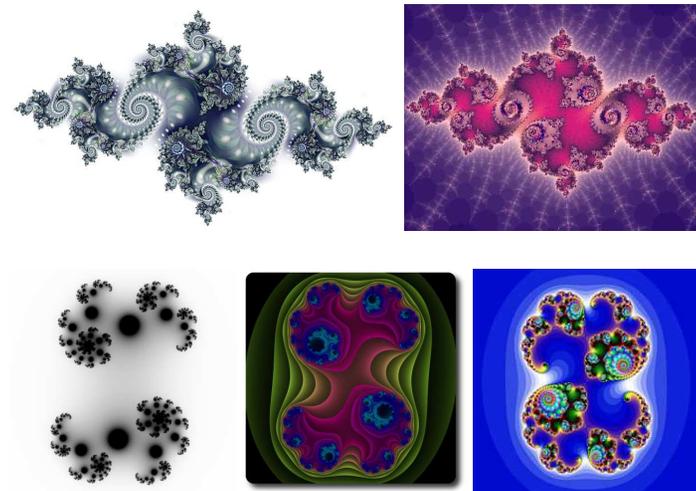
**L'ensemble de Julia est le contour des zones noires.**

**Exemple :**

- **Domaine :**  $|x|$  et  $|y| < 2$ ,
- **30 itérations du système,**
- **si  $|f^n(x + iy)| > 3$  le point est blanc, noir sinon.**

Les couleurs sont données par la vitesse de "divergence" du système, mesurée par exemple par  $|f^n(x + iy)|$ , ou par le numéro d'itération auquel le système s'échappe.

### Exemples



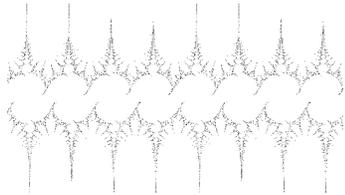
## Ensemble des Julia généralisés

On peut construire des ensembles de Julia à partir d'autres fonctions complexes :

– quotients de polynômes : “rational maps,”

– fonctions transcendentes :

- $\lambda e^z$
- $\lambda \sin z = \lambda \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$
- $\lambda \cos z = \lambda \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$



$$z_{n+1} = C \sin(z_n), C = 1 + 0.1i$$



Fractale de Newton :

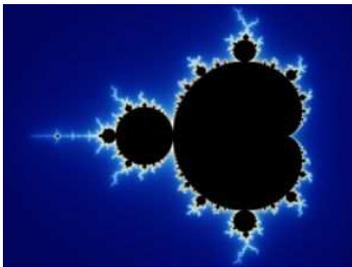
$$z_{n+1} = z_n - P(z_n)/P'(z_n), P(z) = z^5 - 1$$

## Ensemble de Mandelbrot

Si on considère l'ensemble de Julia obtenu par BSM,  $K_c$ , on peut distinguer 2 cas :

- $K_c$  est en un morceau (complètement connecté),
- $K_c$  est constitué d'une infinité de points ( $\simeq$  ensemble de Cantor).

Benoît Mandelbrot a défini l'ensemble fractal  $M = \{c \in \mathbb{C} \mid K_c \text{ est complètement connecté}\}$

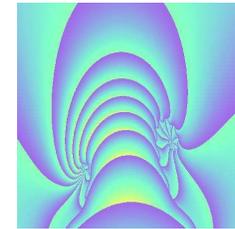
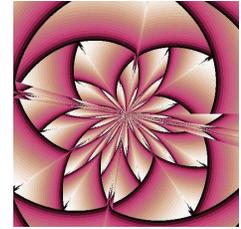
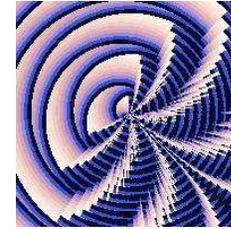


Ensemble de Mandelbrot



Zoom sur une frontière de  $M$

## Exemples



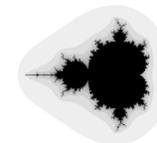
## Construction de l'ensemble de Mandelbrot

On démontre que l'ensemble de Mandelbrot se définit aussi par :

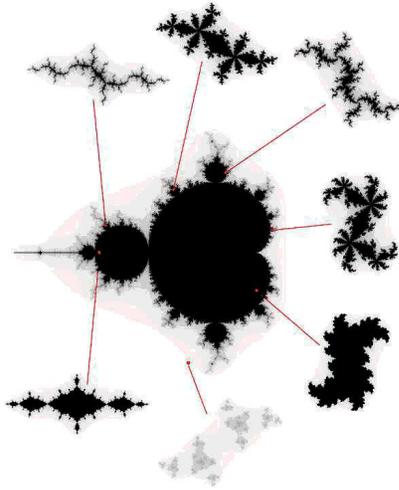
$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid (0, 0) \in K_c\}$$

Si l'orbite  $z_0 = c, z_1 = c^2 + c, \dots$  (ou de façon équivalente  $z_0 = 0, z_1 = c, z_2 = c^2 + c, \dots$ ) est bornée, alors  $c \in M$ .

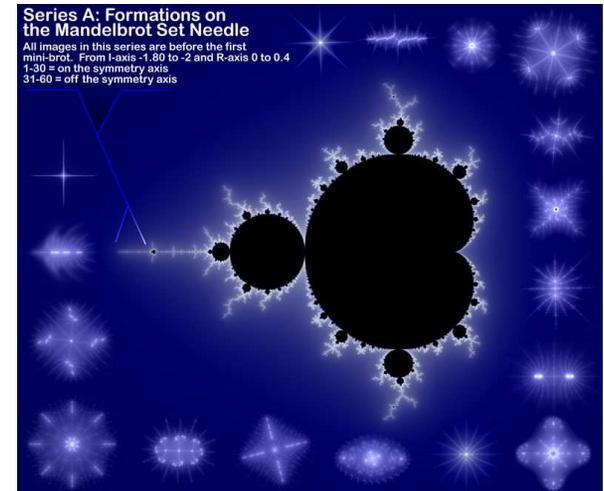
Les méthodes de calcul de l'ensemble de Mandelbrot sont similaires à celles des ensembles de Julia.



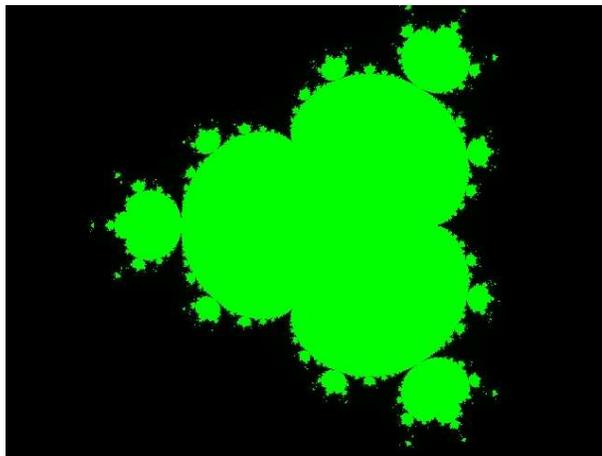
L'ensemble de Mandelbrot "résume" tous les ensembles de Julia



Les mathématiciens étudient différentes caractéristiques de l'ensemble de Mandelbrot

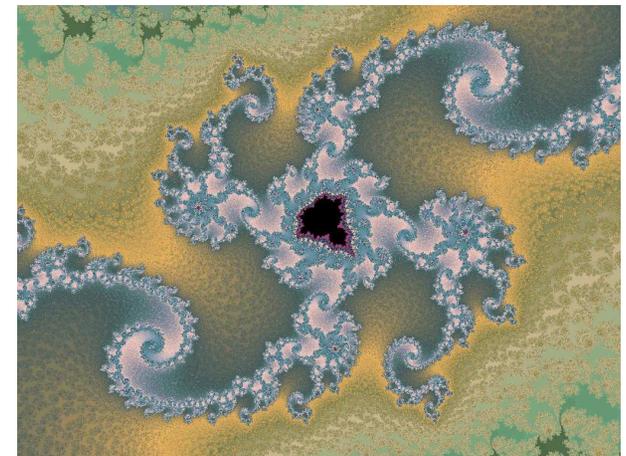


Autres ensembles de Mandelbrot



Ensemble de Mandelbrot avec un polynôme de degré 4 :  $z^4 + c$

Zoom sur l'ensemble de Mandelbrot



Zoom sur l'ensemble de Mandelbrot

